INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. B. Willenberg

Elektrodynamik SoSe 2011

12. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag, den 12.07.2011 um 11:30h, Hausaufgabenkiste bei A316**

37. **Vergütungsschicht**

Eine dielektrische Schicht mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_2 ist durch die Ebenen $x_3 = 0$ und $x_3 = d$ begrenzt und befindet sich zwischen zwei Medien mit ϵ_1 für $x_3 < 0$ und ϵ_3 für $x_3 > d$. Alle drei Medien seien ungeladen und nicht-magnetisch. Eine ebene, elektromagnetische Welle falle vom Gebiet $x_3 < 0$ kommend senkrecht auf die Schicht ein.

(a) Welche Randbedingungen müssen die Felder bei $x_3 = 0$ bzw. $x_3 = d$ erfüllen?

(b) Berechnen Sie die Amplituden der Felder für die reflektierte A^R_{ges} und die transmittierte Welle A^T_{ges} für diese Anordnung. Dabei müssen Mehrfachreflexionen berücksichtigt werden. Führen Sie die folgenden Abkürzungen für die Verhältnisse der Amplituden bei der *einfachen* Reflexion und Brechung an einer Grenzfläche ein:

- r_{12}: Licht fällt aus dem Medium 1 auf das Medium 2 ein und wird reflektiert;
- r_{21}: Licht fällt aus dem Medium 2 auf das Medium 1 ein und wird reflektiert.

Die Koeffizienten r_{23}, t_{12} und t_{21} seien analog definiert. Zeigen Sie:

$$A^R_{\text{ges}} = \left(r_{12} + \frac{t_{21}\, r_{23}\, t_{12}\, e^{i2k_2 d}}{1 - r_{23}\, r_{21}\, e^{i2k_2 d}} \right) A_0 . \tag{1}$$

k_2 ist der Wellenvektor im Medium 2; A_0 ist die Amplitude der einfallenden Welle.

(c) Sei $\epsilon_1 = 1$ (Luft) und $\epsilon_3 = n^2$ (Glas). Zeigen Sie, dass für $\epsilon_2 = n$ die Reflexion verschwindet (Vergütung). Wie muss man d wählen?
Zeigen Sie zunächst:

$$r_{ij} = \frac{\sqrt{\epsilon_i} - \sqrt{\epsilon_j}}{\sqrt{\epsilon_i} + \sqrt{\epsilon_j}}; \quad \text{und} \quad t_{ij} = \frac{2\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\epsilon_i} + \sqrt{\epsilon_j}}.$$

Drücken Sie alle auftretenden Koeffizienten durch n aus und setzen Sie diese in Gleichung (1) ein. (Zahlenbeispiel: typischer Brechungsindex $n = 1.6$, Wellenlänge von sichtbarem Licht in Luft: $\lambda = 0.5\ \mu$m).

Bitte wenden! →

38. **Doppelbrechung**
Wir betrachten die Ausbreitung ebener, elektromagnetischer Wellen in einem homogenen, anisotropen Medium mit $\mu = 1$, das durch einen dielektrischen Tensor ϵ_{ij} mit den Eigenwerten ϵ_i $(i = x, y, z)$ charakterisiert ist. Wählt man also die Hauptachsen des Tensors ϵ_{ij} als Koordinatenachsen, so gilt: $D_i = \epsilon_i E_i$. Es sei $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_\perp, \epsilon_z = \epsilon_\parallel$ (optisch einachsiges Medium).

(a) Zeigen Sie, dass für ebene Wellen mit Frequenz ω und Wellenvektor $\vec{k}$ gilt:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{D} = 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass für einen gegebenen Wellenvektor $\vec{k} = k\,\vec{n}$, $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, zwei verschiedene Ausbreitungsmoden mit verschiedenen Phasengeschwindigkeiten $v = \omega/k$ existieren, die die Beziehung

$$\sum_{i=x,y,z} \frac{n_i^2\, v^2}{v^2 - v_i^2} = 0, \quad v_i = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_i}}$$

erfüllen.

39. **Frequenz-Abhängigkeit der dielektrischen Funktion**
Ein einfaches Modell für die Frequenzabhängigkeit der dielektrischen Funktion $\epsilon = \epsilon(\omega)$ eines Mediums ist die Annahme, dass in einem äußeren elektrischen Feld $\vec{E}$ die Bewegung der Elektronen in jedem Atom des Mediums durch einen getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillator beschrieben werden kann:

$$m_\mathrm{e}\, \partial_t^2 \vec{r} + \gamma\, \partial_t \vec{r} + m_\mathrm{e}\, \omega_0^2\, \vec{r} = e\, \vec{E}.$$

Bestimmen Sie mit $\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i\omega t}$ und dem Dipolmoment $\vec{p} = e\,\vec{r}$ eines Atoms die dielektrische Funktion des Mediums, wenn die Dichte der Atome N/V ist.