



1. Nullpunktenergie des Vakuums

In der Vorlesung wurde die Nullpunktenergie des Photonengases vernachlässigt. Dass diese Nullpunktenergie aber sehr wohl observabel ist, soll hier gezeigt werden. Betrachten Sie dazu einen leeren (würfelförmigen) Kasten mit Seitenlängen L .

- (a) Berechnen Sie die Nullpunktenergie W_L des Kastens, indem Sie über alle $\mathbf{k}$ Zustände summieren. Beachten Sie hierbei, dass es jeweils zwei Polarisationszustände gibt. Mit $L \rightarrow \infty$ liegen die einzelnen $\mathbf{k}$ Vektoren dicht, so dass Sie von der Summation zur Integration übergehen können.

Nun wird der Kasten geteilt, indem an Position R eine leitende Platte eingebracht wird.

- (b) Berechnen Sie wie oben die Nullpunktenergie W_{L-R} des Teils mit Länge $L - R$.
(c) Berechnen Sie außerdem die Nullpunktenergie W_R des Teiles mit Kantenlänge R . Hierbei ist zu beachten, dass R endlich bleiben soll, also die Summation nicht (ohne weiteres) durch eine Integration ausgedrückt werden kann.
(d) Berechnen Sie die Differenz $\Delta W = W_L - W_{L-R} - W_R$. Nach geeigneter Umformung sollten Sie

$$\Delta W = \frac{2\pi\hbar L^2}{R^3} \int_0^\infty dx \left(\sum_{n=-\infty}^\infty \sqrt{x+n^2} - \int_{-\infty}^\infty d\omega \sqrt{x+\omega^2} \right)$$

erhalten.

Diese Differenz zweier divergierender Ausdrücke lässt sich auswerten (nicht gefordert) und man erhält bemerkenswerter Weise ein nicht divergierendes Ergebnis:

$$\Delta W = \frac{\hbar c \pi^2 L^2}{720 R^3}.$$

- (e) Berechnen Sie die Kraft auf die leitende Platte.

Fazit: eine sich im Vakuum befindende, leitende Platte erfährt eine Kraft¹, die nur vom Abstand und von den universellen Konstanten $\hbar$ und c abhängt.

2. Zweiatomiger Ionenkristall

Betrachten Sie einen zweiatomigen Ionenkristall.

- (a) Skizzieren Sie die verschiedenen Dispersionszweige (keine Rechnung erforderlich - siehe Mechanik). Wieviele akustische und wieviel optische Zweige gibt es? Sind diese jeweils entartet?
(b) Zum Berechnen thermodynamischer Observablen, wie z.B. der spezifischen Wärme benötigen Sie die Zustandsdichte der Phononen im Kristall. Warum macht es Sinn, die optischen Zweige durch die Einstein-Näherung (konstante Dispersion bei ω_E) und die akustischen Zweige durch die Debye-Näherung (lineare Dispersion bis zur Debye-Frequenz) zu beschreiben?
(c) Berechnen Sie nun die Energie und spezifische Wärme des Kristalls mit der Näherung aus b). Beachten Sie dabei, dass von den $3N$ Eigenschwingungen ($N/2$ pro Atomsorte) nur die Hälfte auf das Debye-Spektrum entfällt.

Bitte Rückseite beachten $\Rightarrow$

¹Dieses Ergebnis wird manchmal Casimir-Effekt genannt.

3. Das T^3 Gesetz

In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass die Dispersion in der Debye-Näherung $\omega = ck$ zum T^3 -Gesetz der spezifischen Wärme bei kleinen Temperaturen geführt hat. Zeigen Sie in einer analogen Rechnung, dass die Dispersion

$$\omega = ck^t$$

auf eine spezifische Wärme der Form

$$C_v \propto T^{3/t}$$

führt.