INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. R. Darradi

Elektrodynamik SoSe 2009

11. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag, den 23.06.2009 um 11:25h, Hausaufgabenkiste bei A316**

1. **Elektromagnetische Wellen in einem uniaxialen Dielektrikum (8 Punkte)**
Betrachten Sie einen Dielektrikum mit $\mu = 1$ und dem Dielektrizitätstensor

$$\epsilon = \epsilon_1 \begin{pmatrix} 5/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich um einem uniaxialen Kristall handelt. **Hinweis**: Bestimmen Sie das Hauptachsensystem von ϵ und zeigen Sie, dass es einen zweifach entarteten Eigenwert gibt. Geben Sie explizit die Transformation an, die ϵ auf Diagonalform bringt.

(b) Zeigen Sie, dass die Flächen konstanter Energiedichte in Abwesenheit von Magnetfeldern Rotationsellipsoiden im $\vec{E}$-Raum sind (Fresnel-Ellipsoide). Geben Sie die Halbachsen an. Zeigen Sie außerdem, dass die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ bei gegebenem $\vec{E}$ senkrecht auf der Oberfläche des zugehörigen Fresnel-Ellipsoide steht.

(c) Zeigen Sie, dass der Energietransport im allgemeinen, dass heißt für beliebige Eigenwerte von ϵ nicht in Ausbreitungsrichtung erfolgt. Leiten Sie zunächst aus den Maxwell-Gleichungen ab, dass $\vec{H} \cdot \vec{D} = 0$ und $\vec{H} \cdot \vec{E} = 0$ gilt und folgern Sie daraus, dass $\vec{S} \not\parallel \vec{k}$ ist ($\vec{S}$ ist der Poynting-Vektor). Geben Sie eine Gleichung für den Winkel zwischen $\vec{k}$ und $\vec{S}$ an. **Hinweis**: Bestimmen Sie, dass $\vec{D} \cdot \vec{E}$ und $\vec{k} \cdot \vec{S}$ für ebene Wellen aus den Maxwellschen Gleichungen. Begründen Sie, dass $\vec{D}, \vec{H}, \vec{E} \sim \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$ gilt. Zeigen Sie außerdem: $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -|\vec{k}|^2 \vec{E} + (\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k}$.

(d) Im folgenden diskutieren wir die Ausbreitung ebener Wellen $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ in einem Dielektrikum mit ϵ aus Gleichung (1).

   i. Wie lauten die Maxwell-Gleichungen für diesen Fall? Leiten Sie folgende Gleichung für $\vec{E}$ ab, ohne ein spezielles Koordinatensystem zu wählen:

$$-|\vec{k}|^2 \vec{E} + (\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} = -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \cdot \vec{E}. \tag{2}$$

   c ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Bestimmen Sie die Dispersionsrelation $\omega(k)$ für ebene Wellen, die sich:

   - parallel zur Symmetrieachse (z-Achse) des Kristalls ausbreiten. $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(kz - \omega t))$
   - mit $\vec{E} = (E_{0,x}\vec{e}_x + E_{0,z}\vec{e}_z) \exp(i(ky - \omega t))$ senkrecht zur z-Achse ausbreiten.
   - mit beliebigem $\vec{E}_0$ und $\vec{k}$ im Kristall ausbreiten $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$. Wieviele propagierende Moden gibt es? Welchen Winkel bilden $\vec{k}$ und $\vec{E}$ jeweils (d.h., wie ist die Welle polarisiert)?

   ii. Wie bestimmt man bei bekanntem $\vec{E}$ das Magnetfeld $\vec{H}$?