INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. R. Darradi

Mechanik SoSe 2010

10. Übungsblatt Abgabe: **Montag, den 28.06.2010 um 15:00h, Hausaufgabenkiste bei A316**

1. **Bewegung im Zentralkraftfeld**

   (a) Zeigen Sie, dass in Polarkoordinaten die Hamiltonfunktion für die Bewegung in einem Zentralkraftpotential $V(r)$ die Form

   $$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\,p_\phi^2\right) + V(r)$$

   hat.

   (b) Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung auf und setzen Sie für die Prinzipalfunktion

   $$S = W(r, \phi, \alpha_1, \alpha_2) - \alpha_1 t$$

   an. Interpretieren Sie die Bedeutung von α_1. Verwenden Sie den Separationsansatz

   $$W = W_1(r, \alpha_1, \alpha_2) + W_2(\phi, \alpha_1, \alpha_2)$$

   und zeigen Sie

   $$\left(\frac{\partial W_2}{\partial \phi}\right)^2 = -r^2\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + 2mr^2(E - V(r)) =: \alpha_2 = \text{const.}$$

   (c) Geben Sie W_1 und W_2 an und bestimmen Sie die Wirkungsfunktion S. Was ist die Bedeutung von α_2?

   (d) Bestimmen Sie daraus die Bahnkurve in der Form $\phi = \phi(r)$ und $t = t(r)$. Was ist die Bedeutung von β_1 und β_2?
   Hinweis: $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} := \beta_i = \text{const}, \quad i = 1, 2$

2. **Winkel- und Wirkungsvariable**
   Gegeben sei der harmonische Oszillator in einer Dimension

   $$H = \frac{1}{2m}\,p^2 + \frac{c}{2}\,q^2.$$

   Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung auf und verwenden Sie den Separationsansatz $S = W(q, \alpha) - \alpha t$. Berechnen Sie die Wirkungsvariable $J = \oint p\,\mathrm{d}q = \oint \frac{\partial W}{\partial q}\,\mathrm{d}q$. Bestimmen Sie die Frequenz $\nu = \partial K/\partial J$ mit $K = \alpha$.

   Hinweis: Verwenden Sie die Substitution: $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2(\phi)}$