INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. R. Darradi

Elektrodynamik SoSe 2009

10. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag, den 16.06.2009 um 11:25h, Hausaufgabenkiste bei A316**

1. **Legendre-Polynome I (8 Punkte)**

(a) Leiten Sie mit dem Separationsansatz $\Phi(\vec{r}) = P(\cos\theta)Q(\phi)U(r)/r$ aus der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi(\vec{r})) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi(\vec{r})}{\partial\theta^2} = 0 \qquad (1)$$

gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen $P(\cos\theta)$, $Q(\phi)$ und $U(r)$ ab. Zeigen Sie : $Q(\phi) = \exp(im\phi)$. Warum sind nur die Werte $m = 0, \pm1, \pm2, ...$ zugelassen?

(b) Wir betrachten im folgenden zylindersymmetrische Lösungen von $\Delta\Phi(\vec{r}) = 0$, d.h., $m = 0$. Für $P(\cos\theta)$ sollten Sie jetzt die DGL

$$(1-x^2)P^{''}(x) - 2xP^{'}(x) + \lambda P(x) = 0; \quad x = \cos\theta \qquad (2)$$

erhalten. λ ist eine Konstante. Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^\ell; \;\; \ell \in \mathbb{N} \qquad (3)$$

die DGL (2) lösen. Geben Sie die fünf niedrigsten $P_\ell(x)$ an. **Hinweis**: Differenzieren Sie $(\ell+1)$-mal die Gleichung $(x^2-1)\frac{\mathrm{d}(x^2-1)^\ell}{\mathrm{d}x} = 2\ell x(x^2-1)^\ell$.

(c) Zeigen Sie, dass die P_ℓ orthogonale Funktionen auf dem Intervall $-1 \leq x \leq 1$ sind; d.h., dass gilt: $\langle P_\ell|P_{\ell'}\rangle := \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\, P_\ell(x)\, P_{\ell'}(x) = const\,\delta_{\ell\ell'}$. **Hinweis**: Zeigen Sie mittels partieller Integration

$$\langle P_\ell|D\,P_{\ell'}\rangle = \langle D\,P_\ell|P_{\ell'}\rangle \quad \text{mit } D\,P_\ell(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)P_\ell(x) \qquad (4)$$

und verwenden Sie Gleichung (2), um $\langle P_\ell|D\,P_{\ell'}\rangle = -\ell(\ell+1)\langle P_{\ell'}|P_\ell\rangle$ herzuleiten. Bemerkung: in Gleichung (4) wird ein Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ auf dem Raum der stetigen Funktionen $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ definiert.

(d) Für $\ell = \ell'$ gilt (ohne Beweis!): $\langle P_\ell|P_\ell\rangle = \frac{2}{2\ell+1}$. Verifizieren Sie diese Gleichung für $\ell = 0, 1, 2, 3$.

(e) Zeigen Sie, dass $U(r) = a_\ell r^{\ell+1} + \frac{b_\ell}{r^\ell}$ die allgemeine Lösung der Radialgleichung (also der DGL für $U(r)$ ist).

(f) Die Legendre-Polynome $\{\tilde{P}_\ell(x) := \sqrt{(2\ell+1)/2}P_\ell(x);\; \ell \in \mathbb{N}\}$ bilden einen vollständigen Satz orthonormierter Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$. Dass bedeutet, dass sich Funktionen[1] $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ als Linearkombination der $\tilde{P}_\ell$ darstellen lässen:

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \tilde{P}_\ell(x).$$

Stellen Sie $f(x) = x^3$ als Linearkombination der $\tilde{P}_\ell(x)$ dar. **Hinweis**: Ansatz $x^3 = \sum_{\ell=0}^{3} P_\ell(x)$; Koeffizientenvergleich.

[1] Für eine genaue Diskussion der Forderungen an f verweisen wir auf die Mathematik:

2. **Biot-Savart-Gesetz (6 Punkte)**
   Berechnen Sie mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes das Magnetfeld einer unendlich langen Spule auf ihrer Mittelachse. Die Spule habe den Durchmesser $2R$ und die Windungszahl n. Die z-Achse soll mit der Mittelachse der Spule übereinstimmen. Geben Sie wie folgt vor:

   - Parametrisieren Sie die Spulenwindungen mit z.
   - Nutzen Sie die Symmetrie aus und verwenden Sie Zylinderkoordinaten für die Integration.

3. **Induktionskoeffizienten (6 Punkte)**
   Bestimmen Sie den gegenseitigen Induktionskoeffizienten L_{12} zweier paralleler Drähte der Länge L. Der Abstand der Drähte sei d; die Drähte sollen nicht gegeneinander verschoben sein.