INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. R. Darradi

Fortgechrittene Methoden der Theoretischen Physik WS 2009/2010
9. Übungsblatt Abgabe: **Donnerstag, den 14.01.2009, Hausaufgabenkiste bei A316**

1. Betrachen wir ein eindimensionales Gitter von N Plätzen und ein Einteilchen-Hilbertraum mit Zustand $|i,\alpha\rangle$, mit $i = 0, 1, \cdots N-1$ und $\alpha = 1, 2$. Nehmen Sie an dass die Teilchen Fermionen sind und vernachlässigen Sie den Spin. Diese Zustände modellieren elektronische Zustände auf einem eindimensionalen Gitter von fiktiven zwei-Niveau Atomen, die auf den Plätzen i angeordnet sind. Betrachten Sie, einen Hamiltonian operator,

$$H = \sum_{i=0}^{N-1} h_i$$

ist, wobei

$$\langle m,\beta|h_i|n,\alpha\rangle = \delta_{m,n}\delta_{\alpha,\beta}\epsilon_\alpha + \frac{1}{2}(\delta_{m,n+1} + \delta_{m,n-1})t_{\alpha\beta} \ ,$$

mit $\epsilon_\alpha,\ t_{\alpha\beta}\ \in \mathbb{R}$ und $t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha}$, wir benutzen sog. periodische Randbedingungen, d.h. der Platz $n = m$ ist identisch mit Platz $m = 0$. (H ist ein Einteilchenoperator)

(a) Was ist die physikalische Bedeutung von ϵ_α und $t_{\alpha\beta}$?

(b) Sei $c_{i,\alpha}^{(+)}$ der (Erzeugungs) Vernichtungsoperator von Elektronen auf Platz i in Niveau α. Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator in zweiter Quantisierung

$$H = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\epsilon_\alpha c_{i,\alpha}^+ c_{i,\alpha} + \frac{1}{2}t_{\alpha\beta}(c_{i+1,\alpha}^+ c_{i,\beta} + c_{i-1,\alpha}^+ c_{i,\beta})\right] \tag{1}$$

ist. Zeigen Sie, dass H hermitesch ist. Was ist die physikalische Bedeutung von der beiden Summanden in H.

(c) Führen Sie eine Basiswechsel in Gleichung (1) von der Ortraumdarstellung in die Impulsraumdarstellung durch:

$$a_{k,\alpha}^+ = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} e^{\mathrm{i}kn} c_{i,\alpha}^+ \ ,$$

wobei $k = 2\pi m/N$ mit $m = 0, 1, \cdots N-1$ und $\hbar k$ der Impuls ist. Warum ist k so gewählt? Zeigen Sie dass

$$H = \sum_k [a_{k,1}^+ a_{k,2}^+]\begin{bmatrix} \epsilon_1 + t_{11}\cos(k) & t_{12}\cos(k) \\ t_{21}\cos(k) & \epsilon_2 + t_{22}\cos(k)\end{bmatrix}\begin{pmatrix} a_{k,1} \\ a_{k,2}\end{pmatrix} \tag{2}$$

Benützen Sie Gleichung.(2) und zeigen Sie dass

$$H = \sum_{k,\alpha} E_{k\alpha} b_{k,\alpha}^+ b_{k,\alpha} \ ,$$

wobei $b_{k,\alpha}^+$Fermionen sind. Berechnen Sie $E_{k\alpha}$. Was ist die physikalische Bedeutung von $E_{k\alpha}$, α und $b_{k,\alpha}^+$

(d) Diskutieren Sie $E_{k\alpha}$ für $\alpha = 1, 2$ und $\epsilon_1 = 0,\ \ \epsilon_2 = 1,\ \ t_{11} = t_{22} = 1$ als Funktion von k und t_{12}. Bei $t_{21} \neq 0$: was ist der Grundzustand von $N/2$, N und $3N/2$ Fermionen dargestellt durch $b_{k,\alpha}^+$ und das Vakuum $|\rangle$? [**Hinweis :** Nehmen Sie an N ist gerade.]