

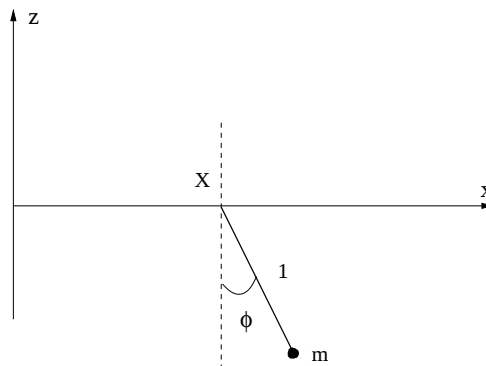
1. Poissonklammern

Berechnen Sie für das Keplerproblem die folgenden Poissonklammern:

$$(a) [L_i, H]. \quad (b) [R_i, H].$$

Dabei sind die R_i die Komponenten des Runge-Lenz Vektors $\vec{R} = \vec{v} \times \vec{L} + V(\vec{r})\vec{r}$, $\vec{L}$ ist Drehimpuls und H ist die Hamiltonfunktion für die Relativbewegung (d.h., die Schwerpunktbewegung soll nicht berücksichtigt werden). Verwenden Sie hierbei Komponentenschreibweise, also insbesondere Summenkonvention und $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$. Rechnen Sie mit kartesischen Koordinaten, d.h., $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$! $r_3 = 0$ darf nicht a priori verwendet werden!

2. Hamilton-Mechanik



Die Hamiltonfunktion ist über eine Legendre-Transformation definiert:

$$H(p_i, q_i) = \sum_l p_l \dot{q}_l - L(\dot{q}_i, q_i). \quad (1)$$

- Ermitteln Sie für das mathematische Pendel, ausgehend von der Lagrangefunktion, den kanonischen Impuls und stellen Sie die Hamiltonfunktion über ihre Definition in obiger Gleichung auf. Leiten Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen ab. Stellen Sie außerdem die Bewegungsgleichung für den einen Freiheitsgrad auf.
- Der Aufhängepunkt des Pendels vollziehe nun Oszillationen (siehe Skizze) nach dem Gesetz $X = a \cos(\omega t)$. Wiederholen Sie die Schritte aus (a) für dieses System.