INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. R. Darradi

Fortgechrittene Methoden der Theoretischen Physik WS 2009/2010

7. Übungsblatt Abgabe: **Donnerstag, den 03.12.2009, Hausaufgabenkiste bei A316**

1. Betrachten Sie die Fermionenbasis der Gleichung

$$\Phi^F_\mu(1,\cdots N) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_P sign(P)\phi_{P_1}(1)\phi_{P_2}(2)\cdots\phi_{P_N}(N)$$

für einen Zustand $\mu = (m_1,\cdots m_N)$ aus N Teilchen.

(a) Die Wahrscheinlichkeit ein Fermion am Ort 1 anzutreffen während ein weiteres am Ort 2 ist, ist

$$\rho(1,2) = \int \mathrm{d}3\mathrm{d}4\cdots\mathrm{d}N\Phi^{F\star}_\mu(1,2,3,\cdots N)\Phi^F_\mu(1,2,3,\cdots N)$$

, wobei $1 = (\vec{r}_1, \sigma_1)$ ist und $\int$ di eine Integration über die koordinaten und eine Summation die Spin bezeichnet. Zeigen Sie, dass

$$\rho(1,2) = \frac{1}{N!}\sum_P\left[\phi^\star_{mP_1}(1)\phi^\star_{mP_2}(2) - \phi^\star_{mP_2}(1)\phi^\star_{mP_1}(2)\right]\phi_{mP_1}(1)\phi_{mP_2}(2)$$

$$= \frac{1}{N(N-1)}\sum_{ab}\left[\phi^\star_a(1)\phi^\star_b(2) - \phi^\star_b(1)\phi^\star_a(2)\right]\phi_a(1)\phi_b(2)$$

(b) Nehmen Sie an, dass die Einteilchenzustände Impuls- und Spin-z-Eigenfunktionen mit $a \equiv (\vec{k},\alpha)$ sind, wobei $\vec{k}$ der Wellenvektor ist und $\alpha = \pm 1$ für Spin-up (down) steht,

$$\phi_a(1) = \phi_{\vec{k}\alpha}(\vec{r},\sigma) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{r}}\delta_{\alpha\sigma}$$

Nehmen Sie außerdem an, dass $\Phi^F_\mu(1,\cdots N)$ aus allen Einteilchenzuständen mit beiden Spinrichtungen bis zum einem Wellenvektor $|\vec{k}| \leqslant k_F$ besteht. Dies ist ein Fermisee. k_F ist der Fermiwellenvektor Zeigen Sie, dass

$$\rho(\vec{r},\sigma,\vec{r'},\sigma') = \frac{1}{N(N-1)V^2}\sum_{\vec{k}\neq\vec{k'};k,k'<k_F}\begin{cases}[1 - e^{\mathrm{i}(\vec{k}-\vec{k'})(\vec{r}-\vec{r'})}] & ,\ \sigma = \sigma' \\ 1 & ,\ \sigma \neq \sigma'\end{cases}.$$

(c) Welchen Wert hat $\rho(\vec{r},\sigma,\vec{r'},-\sigma)$? Versuchen Sie zu zeigen, dass

$$\rho(\vec{r},\sigma,\vec{r'},\sigma') = \frac{N-2}{N^2(N-1)4V^2}\left[1 - 9\left(\frac{\sin(k_Fd) - k_Fr\cos(k_Fd)}{(k_Fd)^3}\right)^2\right]$$

wobei $d = |\vec{r} - \vec{r'}|$ ist. Skizzieren Sie $\rho(\vec{r},\sigma,\vec{r'},\sigma')$ als Funktion von k_Fd. Interpretieren Sie das Ergebnis

2. Beweisen Sie die Gleichung

$$C_{10} = \frac{5}{8}\frac{e^2}{a} = Z\frac{5}{4}\frac{e^2}{2a_0} = Z\frac{5}{4}R_y = \frac{5}{2}R_y \qquad (1)$$

für das Coulombintegral im H_e-Grundzustand, für $Z = 2$, ohne die Gleichung

$$C_{10} = e^2\int \mathrm{d}r_1^3\mathrm{d}r_2^3\frac{|\phi_{100}(\vec{r_1})|^2|\phi_{100}(\vec{r_2})|^2}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|}$$

direkt zu verwenden

(a) Betrachten Sie die durch die Gleichungen

$$\rho_{nl}(\vec{r}) = e|\phi_{nlm}(r)|^2 \quad \rho_{10}(\vec{r}) = e|\phi_{100}(r)|^2$$

und

$$\phi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}, \quad a = \frac{a_0}{Z}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

gegebene Poissongleichunge in Kugelkoordinaten. Zeigen Sie, dass das elektrostatische Potential

$$\nu(r) = \frac{e}{r}\left\{1 - (1 + \frac{r}{a})e^{-\frac{2r}{a}}\right\} \ . \tag{2}$$

ist

(b) Leiten Sie aus der Gleichung (2) die Gleichung (1) her.