Prof. Dr. W. Brenig
Dr. R. Darradi

Mechanik SoSe 2010

7. Übungsblatt Abgabe: **Montag, den 07.06.2010 um 15:00h, Hausaufgabenkiste bei A316**

1. **Variationsrechnung**
   Für Fluggesellschaften ist es von Bedeutung, den schnellsten Weg von einem Ort zum anderen zu finden: Gesucht ist also die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

   (a) Zeigen Sie, dass der Abstand zweier Punkte als

   $$A = \int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}s = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}u$$

   dargestellt werden kann, wobei $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$, und u ist der Bahnparameter.

   (b) Zeigen Sie, dass das Variationsproblem auf die Differentialgleichung

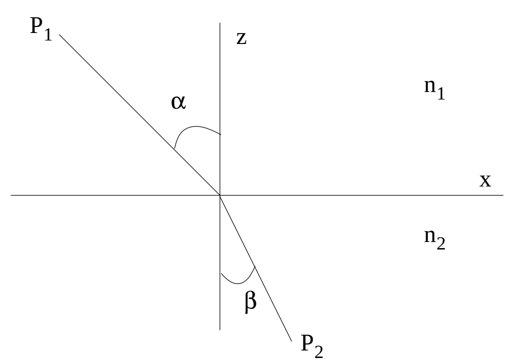
   $$2\lambda\vec{r} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = 0$$

   führt, wobei λ ein Lagrangeparameter ist.

   (c) Ersetzen Sie in dieser Differentialgleichung die Ableitungen nach u durch Ableitungen nach s, multiplizieren Sie die Gleichung vektoriell mit $\vec{r}$ und integrieren Sie einmal.

   (d) Wenn Sie die Gleichung jetzt mit $\vec{r}$ skalar multiplizieren, können Sie das Ergebnis ablesen.

2. **Fermat'sches Prinzip**



Das Fermat'sche Prinzip der geometrischen Optik besagt, dass ein Lichtstrahl zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 denjenigen Weg wählt, für den die optische Weglänge

$$\Delta = \int_{P_1}^{P_2} n(s)\,\mathrm{d}s$$

extremal wird, wobei $n(s)$ der Brechungsindex ist. Leiten Sie daraus das Brechungsgesetz $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$ für die Brechung eines Lichstrahls an der Grenzfläche zweier Medien der Brechungsindizes n_1 und n_2 her, indem Sie die Nebenbedingung $|x_1| + |x_2| = const$ durch die Einfügung eines Lagrangeparameters λ berücksichtigen. Verwenden Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen, um λ zu eliminieren. Die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 sind (x_1, z_1) bzw. (x_2, z_2).