INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. R. Darradi

Fortgechrittene Methoden der Theoretischen Physik WS 2009/2010
6. Übungsblatt Abgabe: **Donnerstag, den 26.11.2009, Hausaufgabenkiste bei A316**

1.

(a) Betrachten Sie ein Boson mit Masse m und einer seltsamen Ladung q, welches um eine dünne Spule in z-Richtung kreist. Es wird angenommen, dass die Ladung q proportional zum Fluss Φ

$$q = C\Phi \;\; C \in \mathbb{R}$$

sei. Nehmmen Sie an, dass der Fluss durch Erhöhen des Magnetfelds B in der Spule zustande kommt. Dabei sei $B(t=0)=0$, und $l_z(t=0)$ wobei l_z der Drehimpuls ist. Zeigen Sie, dass

$$l_z = -\frac{C\Phi\dot{\Phi}}{2} \quad d.h. \;\; l_z = -\frac{q\Phi}{4\pi} \text{ gilt.}$$

Betrachten Sie nun das Boson und die Spule als zusammengesetztes Teilchen.

(b) Betrachten Sie zwei identische zusammengesetzte Teilchen wie in Teil a). Zeigen Sie, dass ausgedrückt durch die Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, den Relativimpuls $\vec{p} = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)/2$ sowie den Gesamtimpuls $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ der Hamilton-Operator des Zwei-Teilchen-System folgende ist:

$$H = \frac{\vec{P}^2}{4m} + \frac{(\vec{p} - q\vec{A}_{r_1 - r_2})^2}{m}$$

Hinweis: das Vektorpotential einer dünnen Spule ist $\vec{A} = \pm\Phi(\vec{e}_z \times \vec{r}/r^2)/2\pi$.

(c) Die Gesamtewellenfunktion für zwei Bosonen ist $\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = \phi(\vec{R})\psi(r, \Theta)$, wobei $\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$ der Massenschwerpunkt und (r, Θ) die Relativkoordinaten (in Zylinderkoordinaten) in Bezug auf die Richtung der Spule sind. Wie reagiert die Wellenfunktion auf eine Drehung um π

$$\psi(r, \Theta + \pi) \overset{?}{\leftrightarrow} \psi(r, \Theta) \; .$$

(d) Zeigen Sie mit der Eichtransformation $\tilde{\vec{A}} = \vec{A} - \nabla\chi$, (wobei $\chi = \frac{\Phi\Theta}{2\pi}$), dass

$$\tilde{H} = \frac{\vec{P}^2}{4m} + \frac{\vec{p}^2}{m}$$

$$\tilde{\psi}(r, \Theta + \pi) = e^{-iq\Phi/2}\tilde{\psi}(r, \Theta) \text{ gilt,}$$

d.h. das zusammengesetzte Teilchen über $\vec{A}_{r_1 - r_2}$ in nicht wechselwirkende Teilchen mit fraktionaler Statistik $\alpha = q\Phi/2$ transformiert werden können.

2.

Beweisen Sie die folgende Gleichung

$$C = \frac{\sqrt{n_1! n_2! \cdots n_N!}}{N!} \; ,$$

für die Normierung der N-Bosonenbasis

$$\Phi^B_\mu(1, \cdots N) = C \sum_{P'} \phi_{P'_1}(1)\phi_{P'_2}(2) \cdots \phi_{P'_N}(N)$$