INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Thermodynamik und Quantenstatistik WiSe 08/09

5. Übungsblatt Abgabe: **Donnerstag den 04.12.2008 bis 11:25h, HA-Kiste bei A316/A317**

1. **Entropie und Information**

Wir betrachten eine Reihe von Ereignissen $E_n (n = 1, 2, \ldots N)$, die mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten p_n mit

$$\sum_n p_n = 1$$

eintreten können. Wir ordnen nun der Feststellung eines Ereignisses E_n einen Informationswert I_n zu. Bei häufiger Wiederholung von solchen Feststellungen an der gleichen Reihe von Ereignissen erhält man dann einen mittleren Informationsgehalt, festgelegt als[1]

$$I = -\sum_n p_n \log_2 p_n .$$

Diese Definition ist so gewählt, dass sie die mittlere Anzahl von einfachen Alternativfragen (Ja/Nein, 1/0) angibt, die zur vollständigen Charakterisierung eines Ereignisses der Reihe nach gestellt und beantwortet werden müssen.

Beispiele:

- $N = 1$. Ein Ereignis tritt mit Sicherheit ein, $p_n = 1$. In Diesem Fall ist $I = 0$. Man gewinnt keine Information, da der Eintritt des Ereignisses von vornherein feststeht.
- $N = 2$. $p_1 = p_2 = 1/2$. Beide Ereignisse treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein. Durch Einsetzen erhält man[2] $I = 1$bit.

Aufgaben:

(a) Ein Hund hält sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf einer der 3x8 Fliesen eines rechteckigen Raumes auf. Wie groß ist die mittlere Information der Feststellung des Aufenthaltsortes? Vergleichen Sie die Information des gleichen Hundes auf einer von 4x8 Fliesen und begründen Sie, warum in Fall 1 eine reelle und in Fall 2 eine natürliche Zahl herauskommen musste.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_n, unter denen die Information I maximal wird. Berücksichten Sie dabei etwaige Nebenbedingungen. Wo ist Ihnen diese Art der Verteilung schon einmal begegnet? Begründen Sie warum es also offensichtlich Sinn macht, eine Gleichverteilung der Zustände anzunehmen!

(c) Berechnen Sie maximale Informationsentropie unseres Alphabets mit 26 Zeichen. Warum ist die Informationsentropie pro Zeichen jedoch kleiner in der Praxis (Deutsche Sprache: 4.0629bit/Zeichen)?

Bitte Rückseite beachten $\Longrightarrow$

[1] $\log_2$ ist der Logarithmus zur Basis 2.
[2] bit ist die Einheit der Information und entspricht einer 0 oder 1 Entscheidung.

2. **Gibbs'sches Paradoxon**
   Die Entropie eines idealen Gases unterscheidbarer Teilchen ist gegeben durch

$$S = Nk \ln V + \frac{3}{2} Nk \left[1 + \ln \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right) \right].$$

   (a) Betrachten Sie zwei verschiedene Gase mit $(V_1, N_1, N_1/V_1 = n)$ und $(V_2, N_2, N_2/V_2 = n)$, die durch eine Trennwand voneinander getrennt sind. Zeigen Sie, dass die Gesamtentropie des Systems nach Entfernen der Trennwand gegenüber der Summe der Einzelentropien um

$$\Delta S = k \left[N_1 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + N_2 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} \right]$$

   erhöht ist. Das Mischen zweier verschiedener Gase ist demnach ein irreversibler Prozeß.

   (b) Betrachten Sie nun noch einmal das Szenario aus 2a, diesmal aber für zwei identische Gase. Geben Sie erneut die sogenannte Mischungsentropie ΔS an. Nun setzen Sie die Trennwand wieder ein und erhalten den Ursprungszustand zweier Systeme zurck - oder doch nicht? Dieses ist das Gibbs'sche Paradoxon. Offensichtlich lässt sich die Entropie durch wiederholtes Herausziehen und wieder Einsetzen der Trennwand beliebig erhöhen. Worin liegt der Fehler?

   (c) Führen Sie die Rechnung aus a) und b) ein weiteres Mal durch, diesmal jedoch mit der um den Gibbs'schen Korrekturfaktor $\frac{1}{N!}$ korrigierten Entropie.

3. **Thermische Fluktuationen**

   (a) Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen in der großkanonischen Gesamtheit gelten:

   i.
$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = kT \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_T$$

   ii.
$$\langle \Delta E \Delta N \rangle = kT \left(\frac{\partial E}{\partial \mu} \right)_T$$

   iii.
$$\langle (\Delta E)^2 \rangle = kT^2 \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_\mu + kT\mu \left(\frac{\partial E}{\partial \mu} \right)_T$$

   Dabei ist E die mittlere Energy, N die mittlere Teilchenzahl, $kT = 1/\beta$ und μ das chemische Potential.

   (b) Berechnen Sie die mittleren quadratischen Fluktuationen des Volumens eines Systems bei konstantem Druck. Geben Sie einen Zahlenwert für 1 Liter Wasser bei T=300K. Für Wasser erhält man aus dem Experiment $-\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p} = 5 \times 10^{-10}\mathrm{Pa}^{-1}$.

   (c) Folgendes thermodynamische System werde betrachtet: An einem Kondensator liege eine konstante Spannung an. Berechnen Sie die Ladungsfluktuationen am Kondensator. Beschaffen Sie sich zu diesem Zweck den statistischen Operator unter der Nebenbedingung $\langle q \rangle = Q$ wobei Q die mittlere Ladung der Kondensatorplatten darstellt. Leiten Sie den Zusammenhang zwischen dem Lagrange-Parameter von q und der anliegenden Spannung U her.