INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Rechenmethoden II SoSe 2006

4. Übungsblatt Abgabe: **16.05.06 (G2) / 17.05.06 (G1) 15:05h, HA-Kiste bei A306**

10. **Laurentreihen (5 Punkte)**
Entwickeln Sie nachfolgende Funktionen in Laurentreihen um z_0 in allen Konvergenzgebieten und geben Sie die dazugehörigen Konvergenzradien an.

(a)
$$f(z) = e^z + \frac{2}{z-i}, \quad z_0 = i$$

(b)
$$f(z) = \frac{z^2 - 4z + 2}{z(z-1)(z-2)}, \quad z_0 = 0$$

11. **Residuensatz (8 Punkte)**
Berechnen Sie:

(a)
$$\oint_{|z-1|=1} dz \frac{\cos(z)}{(1-z^2)}$$

(b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{1+x^4}$$

(c)
$$\int_0^{2\pi} dx \frac{1}{1+3\cos(x)^2}$$

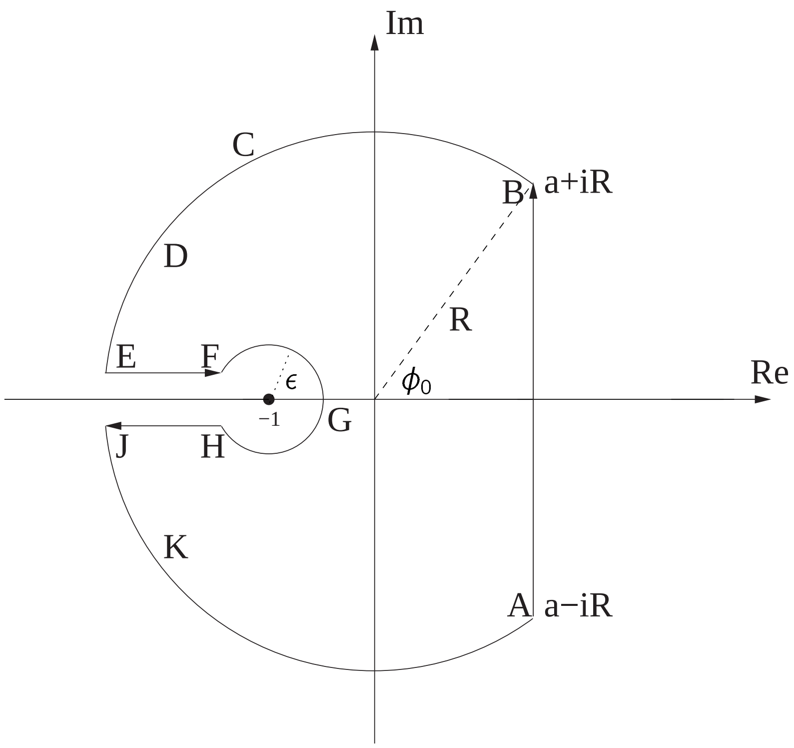
Tips: Das Integral (b) kennen Sie schon aus Aufgabe 9. Die Verwendung des Residuensatzes sollte die Rechnung dieses Mal erheblich vereinfachen. Erinnern Sie sich bei (c) an die komplexe Darstellung des Cosinus und substituieren Sie geeignet.

12. **Und noch ein Integral (7 Punkte)**
Zeigen Sie
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz = \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$$
wobei a und t positive Konstente sind. Betrachten Sie dazu den Integrationsweg aus rückseitiger Abbildung. Einige Tips in Form von Teilaufgaben:

(a) Erklären Sie kurz, warum der Integrationsweg C auf Seite der negativen reellen Achse so zu wählen ist.

(b) Was ergibt $\oint_C \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz$ (mit Begründung)?

(c) Zeigen Sie schließlich, dass die Integrale $\int_{BDE}$, $\int_{FGH}$ und $\int_{JKA}$ im Limes $R \to \infty$, $\epsilon \to 0$ verschwinden. Hilfe zu $\int_{BDE}$ und $\int_{JKA}$: Schätzen Sie das Integral geeignet ab durch Betragsbildung unter dem Integral. Stellen Sie $e^{i\phi}$ durch trigonometrische Funktionen dar und erinnern Sie sich an die Reihenentwicklung des Cosinus.


Im
C
B
a+iR
D
R
E
F
ϵ
ϕ_0
Re
−1
G
J
H
K
A
a−iR