INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. R. Darradi

Fortgechrittene Methoden der Theoretischen Physik WS 2009/2010

3. Übungsblatt Abgabe: **Donnerstag, den 05.11.2009, Hausaufgabenkiste bei A316**

1. **Photoeffekt**
Betrachten Sie ein Photon mit Wellenwektor $\vec{k} = k\vec{e}_z$ und der Polarisation $\vec{u}_{k,\sigma} = \vec{e}_x$, das von einem Atom absorbiert wird, so dass das Atom ein Elektron aus einem seiner gebundenen Zustände $|i\rangle$ in den Streuzustand $|f\rangle$, d.h. einem Kontinuumszustand emittiert.

(a) Geben Sie den Anfangszustand $|I\rangle$ und den Endezustand $|F\rangle$ des Gesamtsystems aus Atom und Strahlungsfeld an.

(b) Nehmen Sie an, dass das Atom sich in einem würfelförmigen Volumen $V = L^3$ befindet. Nehmen Sie außerdem an, dass der Zustand des emittierten Elektrons näherungsweise eine ebene Welle $\langle \vec{r}|\vec{q}\rangle = e^{i\vec{r}\vec{q}}/\sqrt{V}$ mit dem Elektronenimpuls $\hbar\vec{q}$ ist. Man nennt das die Vernachlässigung von "final-State" Wechselwirkung. Das ist zulässig, falls das emittierte Elektron keine zu niedrige Energie hat. Durch den Einschluss in das Volumen V ist der Wellenwektor quantisiert $\vec{k} = (n_x, n_y, n_z)2\pi/L$. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für einem Raumwinkelelement $d\Omega$ ist

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \frac{\text{Elektronenzahl in } d\Omega/dt}{\text{Photonenzahl pro Einheitsfläche}/dt} \ .$$

Zeigen Sie mithilfe

$$R_{fi} = \frac{4\pi^2 q^2}{V m^2 \omega_k} |\langle f|\vec{p} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}|i\rangle|^2 n_{k\sigma} \sin^2(\Theta)\delta(e_f - \hbar\omega_k - e_i)$$

und $\sum_{fi,k\sigma} = R_{fi}/j_{k\sigma}$ wobei $j_{k\sigma} = \frac{n_{k\sigma}}{V}c$ dass

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha q_f V}{2\pi m \hbar\omega_k} |\langle \vec{q}_f|\vec{e}_x \cdot \vec{p} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}|i\rangle|^2 \ ,$$

wobei $\hbar^2|\vec{q}_f|^2/(2m) = e_f = e_i + \hbar\omega_k$ die Energie des Photoelektrons und $\vec{q}_f/|\vec{q}_f|$ seine Emissionsrichtung ist. α ist die Feinstrukturkonstante. Zeigen Sie die Richtigkeit der Einheiten, d.h. [$d\sigma/d\Omega = Länge^2$.]

(c) Sei $|i\rangle$ der 1s Zustand eines Wasserstoff-änhlichen Atoms mit der Ordnungszahl Z

$$\langle \vec{r}|i\rangle = (\frac{Z}{a_0})^3 e^{-Zr/a_0} \ .$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 32 q^2 q_f \frac{(\vec{e}_x \cdot \vec{q}_f)^2}{m c \omega_k} \frac{Z^5}{a_0^5} \frac{1}{(Z^2/a_0^2 + s^2)^4} \ ,$$

wobei $\vec{s} = \vec{q}_f - \omega_k \vec{e}_z/c$. Hinweis: Integrieren Sie partiell nach $\vec{p} = -i\hbar\nabla$ und $\vec{e}_x\vec{k} = 0$. Damit steht $\langle \vec{q}_f|\vec{e}_x \cdot \vec{p} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}|i\rangle$ in direkter Beziehung zur Fourier-Transformation des 1s Zustandes.