

**1. Zwangskräfte I**

Ein Massenpunkt (Masse  $m$ ) gleite unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei auf einer Führungsschiene, die durch  $z = f(x)$  mit  $f(x) = a - a \cosh(x/b)$  gegeben ist ( $[a, b] = 1 \text{ m}$ ). An welcher Stelle und mit welcher Geschwindigkeit  $|\vec{v}|$  springt die Masse von der Schiene ab, wenn sie (anfänglich im Ursprung im labilen Gleichgewicht befindlich) eine infinitesimal kleine Anfangsgeschwindigkeit in  $x$ -Richtung erhält?

*Anleitung:* Geben Sie zunächst einen expliziten Ausdruck für die Zwangskraft in der Form  $\vec{Z} = \vec{Z}(x, \dot{x})$  an. Welche Richtung muss die Zwangskraft haben? Überlegen Sie sich, welche Bedingung im Punkt des Abspringens an die Zwangskraft zu stellen ist.

**2. d'Alembert'sches Prinzip und Lagrange-Gleichungen II. Art**

Stellen Sie für das in Aufgabe 1 beschriebene Problem (d.h., die Bewegung auf der Kurve  $z = a[1 - \cosh(x/b)]$ ) die Bewegungsgleichung (i) mit Hilfe des d'Alembert'schen Prinzips, (ii) mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen II. Art auf.

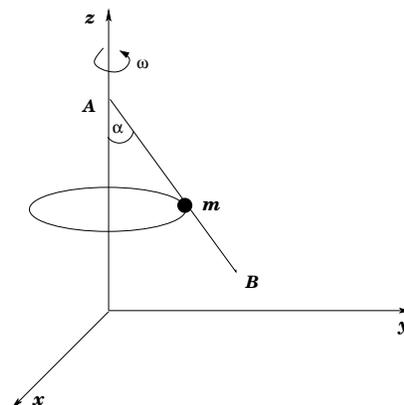
**3. d'Alembert für zwei Massenpunkte**

Zwei Massenpunkte gleicher Masse bewegen sich auf zwei konzentrischen Kreisen mit Radien  $R_1, R_2$  mit  $R_1 < R_2$  und sind durch einen masselosen Stab der Länge  $l \geq R_2 - R_1$  verbunden. Es gibt daher 3 Zwangsbedingungen und somit nur einen Freiheitsgrad.

- Geben Sie alle drei Zwangsbedingungen in kartesischen Koordinaten  $x_i, y_i$ ,  $i = 1, 2$ , an (Ursprung im Mittelpunkt der Kreise;  $i = 1$ : Massenpunkt auf innerem Kreis,  $i = 2$ : Massenpunkt auf äußerem Kreis).
- Führen Sie ebene Polarkoordinaten  $r_i, \phi_i$ ,  $i = 1, 2$ , ein. Verwenden Sie als generalisierte Koordinate  $\phi_1$  und stellen Sie mit Hilfe des d'Alembert'schen Prinzips die BWGL für  $\phi_1$  auf.
- Lösen Sie die BWGL und geben Sie die allgemeine Lösung für  $\phi_1(t)$  und  $\phi_2(t)$  an.

**4. Fallende Perle auf rotierendem Draht**

Wir betrachten den in der Abbildung dargestellten geraden Draht, dessen eines Ende im Punkt A befestigt ist und sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die senkrechte  $z$ -Achse dreht. Dabei bewegt sich auf ihm reibungslos eine Perle der Masse  $m$ .



Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems auf.