Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Thermodynamik und Quantenstatistik WiSe 08/09

2. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag den 13.11.2008 bis 11:25h, HA-Kiste bei A316/A317**

Alle Termine und Übungszettel sind im Internet unter http://www.fkt.tu-bs.de zu finden.

1. **Verkürzen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung (4 Punkte)**
Gegeben sei die kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F(a,b) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} e^{-a^2-b^2-ab}.$$

Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses a wobei uns egal ist, welche Werte b annimmt. **Verkürzen** Sie die Verteilung indem Sie geschickt quadratisch ergänzen und das Integral in die typische Gauss-Integralform bringen. Dessen Lösung können Sie dann durch einen Trick bestimmen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = (\mathrm{Gauss-Integral})^2$$

Führen Sie nun einmal Polarkoordinaten ein...

2. **Dichtematrizen (6 Punkte)**

(a) **Reine Zustände** werden durch die Dichtematrix $\rho_R = |\psi><\psi|$ beschrieben; **gemischte Zustände** dagegen durch eine Überlagerung unterschiedlicher Zustände gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens in einem Ensemble von Systemen, also $\rho_G = \sum_i p_i |\psi_i><\psi_i|$. Beweisen Sie

$$\rho_G^2 \neq \rho$$

(b) Die Spin-Eigenzustände zu σ_z (Pauli-Matrix) sind gegeben durch $|\psi_+^z\rangle = |\uparrow\rangle = \binom{1}{0}$ bzw. $|\psi_-^z\rangle = |\downarrow\rangle = \binom{0}{1}$. Geben Sie die Dichtematrizen für die nachfolgenden drei Fälle in ihrer Schreibweise aus (a) und in ihrer Matrixdarstellung $\rho_{nm} = \langle n|\rho|m\rangle$ an.

i. Reiner, in $|\uparrow\rangle$-Richtung polarisierter, Elektronenstrahl.

ii. 1:1 gemischter Elektronenstrahl aus $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ Elektronen.

iii. Reiner Elektronenstrahl dessen Elektronenzustände sich aus einer linearen Superposition zusammensetzen mit $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + e^{i\alpha}|\downarrow\rangle\right)$.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von σ_z und σ_x für 2(b)ii und 2(b)iii.

Bitte Rückseite beachten $\Longrightarrow$

3. **Das ideale Gas (10 Punkte)**

Wir interessieren uns für die thermodynamischen Eigenschaften des idealen Gases. Sperren Sie dazu N nichtwechselwirkende, ununterscheidbare Teilchen in einen Würfel mit Kantenlänge L, den Sie sich periodisch ins Unendliche fortgesetzt vorstellen können.

(a) Geben Sie die Lösung der Wellenfunktion und die Energie E_n an.

(b) Berechnen Sie die Zustandssumme, indem aus der Summe über die Energien E_n ein Integral über dn bzw. dp gemacht wird. Begründen Sie diesen Schritt. Zur Vereinfachung der Rechnung: Zeigen Sie, dass $Z = \frac{1}{N!} Z_i^{3N}$ wobei Z_i die Einteilchen-Zustandssumme in einer Dimension ist.

(c) Geben Sie den Mittelwert der Energie $\langle E \rangle$ an.

(d) Berechnen Sie die Anzahl der Zustände unterhalb einer Energie E, d.h. das Phasenraumvolumen, üblicherweise als $g(E)$ bezeichnet. In Verlauf der Rechnung müssen Sie das Volumen einer $3N$-dimensionalen Kugel bestimmen. Dazu gehen Sie am besten nach folgender Anleitung vor:

- Schreiben Sie ein Volumenintegral in kartesischen Koordinaten über den Integranten 1 für eine Kugel mit Radius R in N Dimensionen auf.

- Versuchen Sie daraus mithilfe einer Substitution ein Volumenintegral über eine Einheitskugel zu machen.

- Dann berechnen Sie folgenden Ausdruck:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_N^2)}$$

  Wovon hängt der Integrant ab? Sie können demnach die Integration über Kugelschalen ausführen, d.h.:

$$dV = dx_1 \cdots dx_n \to (\text{Kugelschale}) dR$$

  Überlegen Sie sich dazu, wie das Volumen der Kugel mit ihrer Oberfläche zusammenhängt[1].

- Können Sie eventuell vereinfachen mithilfe der Γ-Funktion?

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}$$

- Überprüfen Sie das Ergebnis für das Volumen einer Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit der Rekursionsformel $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ und $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Da Sie nun das Volumen einer N-dimensionalen Kugel bestimmt haben brauchen Sie für das Phasenraumvolumen von $3N$ Variablen zu einer Energie E nur noch einsetzen. Alles was Ihnen fehlt ist die obere Integrationsgrenze, also der Radius der 3N-dimensionalen Kugel dem die Energie E entsprechen muss.

(e) Berechnen Sie aus obigem $g(E)$ die Zustandsdichte $\Omega(E)$. Leiten Sie zu diesem Zweck

$$\Omega(E) = \frac{dg(E)}{dE}$$

kurz her. Dazu: überlegen Sie sich die Anzahl von Zuständen in einem Energieintervall dE.

[1] zur Not auch erstmal im $\mathbb{R}^3$