INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. B. Willenberg

Elektrodynamik SoSe 2011

8. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag, den 07.06.2011 um 11:30h, Hausaufgabenkiste bei A316**

25. **Elektromagnetisches Feld einer bewegten Punktladung**
In dieser Aufgabe soll das Feld einer mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Punktladung berechnet werden.

(a) Bestimmen Sie das Vierer-Potenzial $A^{\mu\prime}$ der Punktladung in ihrem Ruhesystem Σ'. Geben Sie das Vierer-Potenzial aus Sicht eines relativ zu Σ' mit $\vec{v} = v_0\vec{e}_1$ bewegten Inertialsystems Σ an. Welche Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ beobachtet man in Σ? Bestimmen Sie die Äquipotenzialflächen $\Phi(\vec{r}) = \text{const}$ und skizzieren Sie diese sowie die Feldlinien von $\vec{E}$.

(b) Aus der Vorlesung sind die Liénard-Wiechert Potenziale bekannt. Berechnen Sie $\vec{E}$ und $\vec{B}$ für den Fall einer Punktladung, die sich mit konstantem $\vec{v} = v_0\vec{e}_1$ bewegt. Leiten Sie dazu die folgende Form der Liénard-Wiechert Potenziale ab:

$$\begin{aligned} A_i(\vec{r},t) &= \frac{q}{c}\left.\frac{v_i(\tau)}{[|\vec{r}-\vec{x}(\tau)| - (1/c)\vec{v}(\tau)\cdot(\vec{r}-\vec{x}(\tau))]}\right|_{\tau=t_{\text{ret}}} \\ \Phi(\vec{r},t) &= \left.\frac{q}{[|\vec{r}-\vec{x}(\tau)| - (1/c)\vec{v}(\tau)\cdot(\vec{r}-\vec{x}(\tau))]}\right|_{\tau=t_{\text{ret}}} . \end{aligned} \tag{1}$$

$\vec{x}(t)$ ist die Bahnkurve der Punktladung und $\vec{v}(t)$ ihre Geschwindigkeit. Beachten Sie beim Differenzieren, dass die Gleichung $t_{\text{ret}} = t - |\vec{r}-\vec{x}(t_{\text{ret}})|/c$ eine *implizite* Definition der retardierten Zeit darstellt. Formen Sie $\vec{E}$ solange um, bis Sie für $\vec{E}$ Ihr Ergebnis aus Teil (a) erhalten (und zwar dasjenige für $\vec{E}$ aus (a)!).
Hinweis: Es ist hilfreich, die Abkürzungen

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{x}(t_{\text{ret}}); \quad R = |\vec{R}|; \quad v_R = \frac{\vec{v}(t_{\text{ret}})\cdot\vec{R}}{R}$$

einzuführen und zunächst die Ausdrücke $\partial t_{\text{ret}}/\partial t; \nabla t_{\text{ret}}; \nabla R; \nabla v_R$ usw. zu bestimmen, *ohne* dabei die retardierte Zeit zu eliminieren. Stellen Sie also zunächst $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in Abhängigkeit von $\vec{R}$ und v_R dar. Um mit (a) vergleichen zu können, muss die retardierte Zeit aus $\vec{E}$ eliminiert werden. Zeigen Sie dazu:

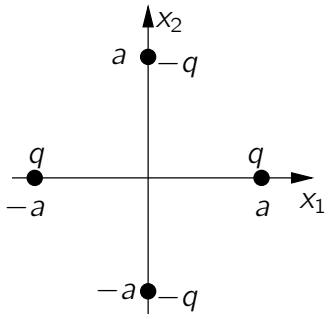
$$\vec{r} - \vec{v}t = \vec{R} - R\frac{\vec{v}}{c} \quad \text{und} \quad R^2(1 - v_R/c)^2 = (\vec{r}-\vec{v}t)^2 - [(\vec{v}/c)\times(\vec{r}-\vec{v}t)]^2 .$$

Bitten wenden! →

26. **Multipolentwicklung**

Berechnen Sie das Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment der folgenden Ladungsverteilungen bezüglich des Koordinatenursprungs:

(a) Vier Punktladungen q und $-q$ wie rechts in der Skizze dargestellt.



(b) Homogen geladene Kugelschale mit Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt.

(c) Zylinder mit Radius R und Länge L, sowie mit folgender Raumladungsdichte:
$\rho(\vec{r}) = \{c\, x_3^n; \quad c = \text{const}, n \in \mathbb{N}$ für $-L/2 \leq x_3 \leq L/2$ und $x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$

Geben Sie außerdem jeweils die Beiträge der einzelnen Momente zum Potenzial $\Phi(\vec{r})$ an.

27. **Quadrupolmoment**

(a) Zeigen Sie, dass das Quadrupolmoment ein Tensor 2. Stufe ist.

(b) Wann ist das Quadrupolmoment unabhängig von der Wahl des Koordinatenursprungs? Beweisen Sie Ihre Aussage.

(c) Überlegen Sie sich, unter welchen Vorausetzungen man das Quadrupolmoment Q_{ij} eines starren Körpers durch seinen Trägheitstensor Θ_{ij} ausdrücken kann. Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Komponenten des Quadrupolmoments und denen des Trägheitstensors an.