INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. B. Willenberg

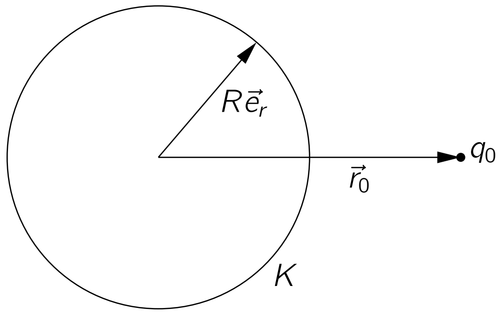
Elektrodynamik SoSe 2011

7. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag, den 31.05.2011 um 11:30h, Hausaufgabenkiste bei A316**

22. **Punktladung gegenüber leitender Kugel**
Gegeben sei eine geerdete, metallische Kugel K mit Radius R. Bringt man eine Punktladung q_0 an den Ort $\vec{r}_0$ in die Nähe der Kugel, entsteht auf der Kugeloberfläche eine Influenzladung.

    (a) Geben Sie das Potenzial $\Phi(\vec{r})$ im Außenraum der Kugel mit Hilfe der Methode der Bildladung unter der Randbedingung $\Phi(\vec{r})|_{\vec{r}\in\partial K} = 0$ an.

    (b) Wie groß ist das elektrische Feld im Innenraum der Kugel? Begründen Sie, unter welchem Winkel das elektrische Feld auf der Oberfläche der Kugel einmündet. Verwenden Sie den Gauß'schen Satz, um eine Bestimmungsgleichung für die influenzierte Oberflächenladungsdichte $\sigma_0(\vec{r})$ aufzustellen. Geben Sie $\sigma_0(\vec{r})$ an. Welches sind die Linien $\sigma(\vec{r}) = \text{const}$ auf der Kugeloberfläche? Skizzieren Sie $\sigma_0(\vec{r})$ in geeigneter Weise.

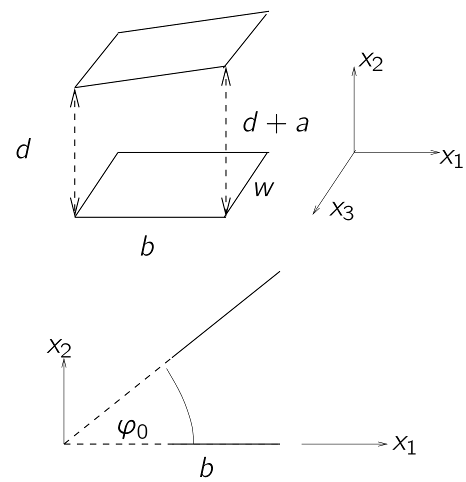


23. **Kapazitäten**
Wir betrachten den *nicht-ganz-so-parallelen* Plattenkondensator (siehe Skizze). Zwischen den Platten liege die Spannung U an. Berechnen Sie die Kapazität und vernachlässigen Sie dabei Randeffekte. Gehen Sie wie folgt vor:

    (a) Führen Sie Zylinderkoordinaten (r, φ, z) ein, wobei die z-Achse in der Schnittgeraden der beiden Plattenebenen liege. Begründen Sie, dass das Potenzial nur von φ abhängt.

    (b) Lösen Sie die Laplace-Gleichung im Volumen zwischen den Platten. Verwenden Sie als Randbedingungen $\Phi(x_1, x_2 = 0, x_3) = 0$ und geben Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ an.

    (c) Berechnen Sie die Ladung Q auf der Kondensatorplatte bei $x_2 = 0$.



Bitte wenden! →

24. **Separationsansatz in kartesischen Koordinaten**
Lösen Sie die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ im Volumen

$$V = \{\vec{r}\,|\,0 \leq x_1 \leq a;\, 0 \leq x_2 \leq b\}$$

mit Hilfe eines Separationsansatzes unter den Randbedingungen:

$$\Phi(0, x_2) = \Phi(a, x_2) = 0; \quad \Phi(x_1, 0) = 0; \quad \Phi(x_1, b) = B\, x_1.$$

Hinweis: Stellen Sie den Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten auf und verwenden Sie den Ansatz $\Phi(x_1, x_2) = U_n(x_1)W_n(x_2)$. Zeigen Sie, dass $U_n(x_1)$ und $W_n(x_2)$ gewöhnliche Differenzialgleichungen erfüllen und lösen Sie diese allgemein. Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung hat dann die Form:

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_n U_n(x_1)\, W_n(x_2).$$

Bestimmen Sie alle auftretenden Integrationskonstanten aus den Randbedingungen. Dafür benötigen Sie die Orthogonalitätsrelationen für die trigonometrischen Funktionen $S_n = \sin(nx)$, $C_n = \cos(mx)$ (n, m sind ganze Zahlen):

$$\begin{aligned}
\langle S_n\,|\,S_m\rangle &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi dx\, \sin(nx)\sin(mx) = \delta_{n,m} \\
\langle C_n\,|\,C_m\rangle &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi dx\, \cos(nx)\cos(mx) = \delta_{n,m} \\
\langle S_n\,|\,C_m\rangle &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi dx\, \sin(nx)\cos(mx) = 0.
\end{aligned}$$