

19. **Dirichlet'sche Randbedingung**

Betrachten Sie ein Potenzialproblem im Halbraum $z \geq 0$ mit Dirichlet'schen Randbedingungen in der xy -Ebene (sowie im Unendlichen).

- (a) Schreiben Sie die entsprechende Green'sche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ auf.
- (b) Der Wert des Potenzials $\Phi(\vec{r})$ sei in der xy -Ebene vorgegeben: $\Phi = V$ innerhalb eines Kreises mit Radius a um den Ursprung, sowie $\Phi = 0$ außerhalb dieses Kreises. Bestimmen Sie für $\Phi(\vec{r})$ an einem Punkt $\vec{r}$ im Halbraum $z \geq 0$ einen Integralausdruck in Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) .
- (c) Zeigen Sie, dass $\Phi(\vec{r})$ auf der z -Achse ($\rho = 0$) gegeben ist durch

$$\Phi = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right).$$

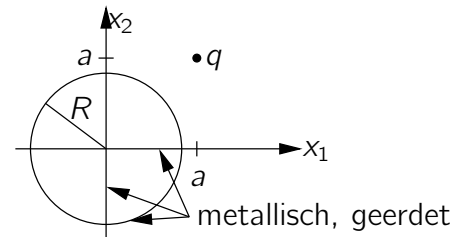
- (d) Zeigen Sie, dass sich das Potenzial in großen Abständen ($\rho^2 + z^2 \equiv r^2 \gg a^2$) in eine Potenzreihe bezüglich r^{-1} entwickeln lässt, mit den führenden Termen

$$\Phi = \frac{Va^2}{2} \frac{z}{r^3} \left[1 - \frac{3a^2}{4r^2} + \frac{5(3\rho^2 a^2 + a^4)}{8r^4} + \dots \right].$$

Zeigen Sie, dass die Ergebnisse von Teil (c) und (d) im gemeinsamen Gültigkeitsbereich konsistent sind.

20. **Methode der Bildladung I**

Bestimmen Sie das Potenzial Φ im Bereich $\{\vec{r} | x_1, x_2 > 0; \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > R\}$ für die in der Skizze dargestellte Geometrie. Eine Punktladung q befindet sich bei $(a, a, 0)$. Die Metallplatten bei $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ sowie die Kugel um den Ursprung mit Radius R seien geerdet. Zeigen Sie insbesondere auch, dass $\Phi = 0$ für $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ und auf der Oberfläche der Kugel erfüllt sind.



21. **Methode der Bildladung II**

Zwischen zwei in x_2 - und x_3 -Richtung unendlich ausgedehnten, geerdeten Metallplatten bei $x_1 = a$ und $x_1 = b$ mit $b < 0 < a$ befindet sich eine Punktladung q am Ort $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$.

- (a) Finden Sie mit der Methode der Bildladung einen allgemeinen Ausdruck für das Potenzial $\Phi(\vec{r})$ im Volumen $V = \{\vec{r} | b \leq x_1 \leq a\}$.
- (b) Vereinfachen Sie den Ausdruck mit der Annahme $a = -b = d$ und zeigen Sie explizit, dass Ihre Wahl der Bildladungen die Randbedingung $\Phi(\vec{r})|_{\vec{r} \in \partial V} = 0$ erfüllt.
- (c) Plotten Sie mit einem Programm Ihrer Wahl die Feldlinien für den Fall $a = 1$, $b = -3$.