Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. B. Willenberg

Elektrodynamik SoSe 2011

3. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag, den 03.05.2011 um 11:30h, Hausaufgabenkiste bei A316**

10. **Kontinuitätsgleichung**
Betrachten Sie eine diskrete Verteilung von Punktladungen

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i(t)\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

mit zeitabhängigen Orten $\vec{r}_i(t)$ der Ladungen $q_i(t)$. Was folgt aus der Kontinuitätsgleichung für $q_i(t)$?

11. **Homogen geladene Kugeloberfläche**
Die Oberfläche einer Kugel mit Radius R trägt die konstante Flächenladungsdichte σ_0. Der Mittelpunkt der Kugel soll der Koordinatenursprung sein. Wir unterscheiden die Raumbereiche I ($r < R$) und II ($r > R$) mit $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

(a) Berechnen Sie das Potenzial $\Phi(\vec{r})$ in den Raumbereichen I und II aus dem Poisson-Integral

$$\Phi(\vec{r}) = \int \mathrm{d}V' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

und geben Sie dann das elektrische Feld $\vec{E}$ an.

(b) Ermitteln Sie das Potenzial $\Phi(\vec{r})$, indem Sie die Laplace-Gleichung unter Ausnutzung von Symmetrien in den Bereichen I und II separat lösen. Bestimmen Sie die auftretenden Integrationskonstanten aus den Randbedingungen:

- $\lim_{r\to\infty} \phi(\vec{r}) = 0$.
- Φ ist stetig bei $r = R$.

Welche zusätzliche Bedingung kommt im Bereich $r < R$ hinzu? Skizzieren Sie Φ als Funktion von r.
Hinweis: Eine Integrationskonstante bleibt (scheinbar) frei. Legen Sie diese durch Vergleich mit Ihren Ergebnissen aus Teil (a) fest.

(c) Verwenden Sie den Gauß'schen Satz, um das elektrische Feld $\vec{E}$ in den Bereichen I und II zu bestimmen. Bestimmen Sie dann das Potenzial. Wie verhält sich das elektrische Feld bei $r = R$? Skizzieren Sie $|\vec{E}|$ als Funktion von r.

Bitte wenden! →

12. **Poisson-Gleichung und Fouriertransformation**

Ziel dieser Aufgabe ist die erneute Lösung des Problems aus Aufgabe 11 mit Hilfe der Fouriertransformation. Unter der Fouriertransformation einer Funktion $f(\vec{r}) \mapsto f(\vec{k})$ verstehen wir den Ausdruck

$$f(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{R^3} \mathrm{d}^3\vec{r}\, e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}\, f(\vec{r}).$$

Die Rücktransformation ist durch

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{K^3} \mathrm{d}^3\vec{k}\, e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}\, f(\vec{k})$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\Phi(\vec{k}) = \frac{4\pi}{|\vec{k}|^2}\,\rho(\vec{k}) \tag{1}$$

gilt, wenn $\Phi(\vec{r})$ und $\rho(\vec{r})$ die Poisson-Gleichung $\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\,\rho(\vec{r})$ erfüllen.

(b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\rho(\vec{k})$ der Ladungsverteilung.
Hinweis: $\rho(\vec{r})\mathrm{d}V = \sigma_0\, r^2\, \sin\vartheta\, \delta(r-R)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi$.

(c) Setzen Sie Ihr Ergebnis aus Teil (b) in Gleichung (1) ein und bestimmen Sie $\Phi(\vec{r})$ durch Fourierrücktransformation.