INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. B. Willenberg

Elektrodynamik SoSe 2011

2. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag, den 26.04.2011 um 11:30h, Hausaufgabenkiste bei A316**

7. **Krummlinige, nicht-orthogonale Koordinaten**
Als Beispiel für krummlinige und nicht-orthogonale Koordinaten $u^1, u^2, u^3$ betrachten wir ($x^1, x^2, x^3$ sind kartesische Koordinaten):

$$x^1 = -a\,u^1 \sin(u^2); \qquad x^2 = b\,u^1 \cos(u^2); \qquad x^3 = cu^3; \qquad a, b, c, \neq 0.$$

(a) Bestimmen Sie die normierte Basis $\vec{e}_i$ der Tangentialvektoren $\vec{e}_i = \vec{t}_i/|\vec{t}_i|$, wobei $\vec{t}_i = \partial\vec{x}/\partial u^i$. Dies ist die sogenannte *kovariante* Basis.

(b) Für zwei Vektoren $\vec{a} = a^i\,\vec{e}_i$ und $\vec{b} = b^j\,\vec{e}_j$ (Einstein'sche Summenkonvention!) sind $a^i$ und $b^i$ die sogenannten *kontravarianten* Komponenten. Für das gewöhnliche Skalarprodukt gilt $\vec{a}\cdot\vec{b} = g_{ij}\,a^i\,b^j$, wobei $g_{ij}$ die (*kovariante*) *euklidische* Metrik ist. Bestimmen Sie im vorliegenden Fall $g_{ij}$.

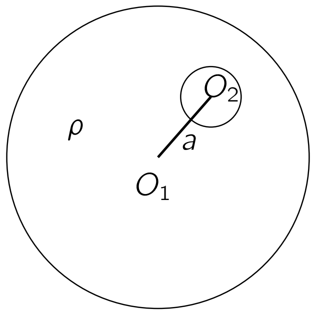
(c) Zu jeder kovarianten Basis gibt es eine *kontravariante* Basis $\vec{e}^{\,i}$, mit $\vec{e}^{\,i}\cdot\vec{e}_j = \delta^i_j$. Dabei ist $\delta^i_j$ das Kroneckersymbol. Bestimmen Sie $\vec{e}^{\,i}$ im vorliegenden Fall.
*Hinweis:* Betrachten Sie $\vec{e}_i \times \vec{e}_j/(\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3))$ für $(i,j) = (1,2),(1,3),(2,3)$.

(d) Der Vektor $\vec{b} = b^j\vec{e}_j$ lässt sich auch in *kovarianten* Komponenten $\vec{b} = b_j\vec{e}^{\,j}$ schreiben. Drücken Sie damit das gewöhnliche Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ allgemein mittels der kontravarianten (kovarianten) Komponenten von $\vec{a}$ ($\vec{b}$) aus. Wie erhält man $b_j$ aus $g_{ij}$ und $b^j$?

(e) Skizzieren Sie die Koordinatenlinien in der $x^1$-$x^2$-Ebene für $a = 1$, $b = 2$ und zeichnen Sie die kontra- und kovarianten Basisvektoren in den Punkten $(u^1, u^2) = (1, \pi/4)$ und $(u^1, u^2) = (1, \pi/2)$ ein. Welche Gleichungen beschreiben die Linien $u^1 = \text{const}$ bzw. $u^2 = \text{const}$ in kartesischen Koordinaten?

(f) Bestimmen Sie den Laplace-Operator in den Koordinaten $u^1, u^2, u^3$.

8. **Superpositionsprinzip**
Eine Kugel mit Radius $R_1$ ist mit Ausnahme eines kugelförmigen Hohlraums mit der konstanten Ladungsdichte $\rho$ aufgeladen. Der Hohlraum hat den Radius $R_2$, sein Mittelpunkt $O_2$ befindet sich in der Entfernung $a$ vom Mittelpunkt $O_1$ der großen Kugel ($a + R_2 < R_1$). Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ sowie das Potential $\Phi$ in einem beliebigen Punkt im Inneren des Hohlraums. Welchen Wert hat $\Phi$ im Mittelpunkt der Hohlkugel?




*Hinweis:* Berücksichtigen Sie bei der Berechnung des elektrischen Feldes die Kugelsymmetrie und den Gauß'schen Satz.
*Hinweis 2:* Das Potential der gesamten Anordnung soll im Unendlichen verschwinden.

9. **Kraft zwischen einer Punkt- und einer Linienladung**
Eine gleichförmige Linienladung von $\lambda$ (in esu/cm) befinde sich im Abstand $r$ von einer Punktladung $Q$ mit entgegengesetztem Vorzeichen.

(a) Berechnen Sie die Anziehungskraft zwischen der Linien- und der Punktladung.

(b) Zeigen Sie, dass sich dieselbe Kraft ergibt, wenn die Linienladung durch eine im Fußpunkt des von $Q$ gefällten Lots befindliche Einzelladung von der Größe $Q' = 2\lambda\,r$ ersetzt wird.