Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. M. Feyerabend

Klausurvorbereitung Bearbeitungszeit: 180 Minuten

1. **Wissensfragen** **(20 Punkte)**

Benennen Sie alle auftretenden Größen und Symbole.

(a) Was ist ein Inertialsystem?

(b) In einem bewegten Bezugssystem treten zur eingeprägten Kraft vier weitere Terme hinzu. Geben Sie diese vier Terme an und versehen Sie zwei mit ihren Namen.

(c) Was ist der Lenz-Runge-Vektor?

(d) Wann ist ein Kraftfeld konservativ? Geben Sie drei äquivalente Kriterien an.

(e) Wie lautet das d'Alembertsche Prinzip?

(f) Wie lautet das Hamiltonsches Prinzip?

(g) Zeigen Sie: $\{A, q_\alpha\} = -\partial_{p_\alpha} A$ für eine beliebige Funktion A der generalisierten Koordinaten und Impulse. Die geschweifte Klammer stellt die Poisson-Klammer dar.

(h) Wie lautet die Hamilton-Jacobi-Gleichung und welche Größe wird durch sie bestimmt?

(i) Was ist eine kanonische Transformation und worin besteht das Ziel einer solchen Transformation?

(j) Was versteht man unter Konfigurations- und was unter Phasenraum? Wie viele Dimensionen haben diese Räume für ein System aus N Massenpunkten bei r Nebenbedingungen?

Weiter auf nächstem Blatt ⟶

2. **Bewegung im eindimensionalen Potential** **(10 Punkte)**

Betrachten Sie die Bewegung eines Massenpunktes der Masse m im Potential

$$V(x) = V_0 \left[\cosh(x/d) - 1\right] \quad , \quad V_0, d = const \quad , \quad V_0 \neq 0, \quad d > 0 \quad .$$

(a) Skizzieren Sie $V(x)$ für $V_0 < 0$ und $V_0 > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $x_G = 0$ ein Gleichgewichtspunkt ist. Für welche Gesamtenergie U kann sich der Massenpunkt im Gleichgewichtspunkt aufhalten? Unter welcher Bedingung ist dieser Gleichgewichtspunkt stabil? Erläutern Sie den Hintergrund anhand des Energieerhaltungssatzes.

(c) Unter welchen Bedingungen für V_0 und U ist eine periodische Bewegung möglich? Bestimmen Sie für diese Situation die Umkehrpunkte.

(d) Benutzen Sie den Energieerhaltungssatz und lösen Sie das erste Integral für kleine Elongation ($|x| \ll d$). Leiten Sie daraus die Periode der Bewegung ab.

Formelsammlung:

$$\cosh(\mathrm{x}) \approx 1 + \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \mathcal{O}(\mathrm{x}^4)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{2\mathrm{cx} + \mathrm{b}}{\sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}} \quad \text{für} \quad \mathrm{c} < 0, \mathrm{a} > 0.$$

Weiter auf nächstem Blatt $\longrightarrow$

3. **Absprung von Kurve** **(9 Punkte)**

Ein Massenpunkt der Masse m gleite unter dem Einfluss der Schwerkraft $\underline{F} = -mg\underline{e}_3$ reibungsfrei auf einer Führungsschiene in der x_1-x_3-Ebene, die durch

$$x_3 = -\alpha x_1^3 \quad , \quad \alpha > 0$$

gegeben ist. Anfänglich befindet sich die Masse im Ursprung im labilen Gleichgewicht.

(a) Nutzen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art (LI) um die Zwangskräfte zu berechnen.

(b) An welcher Stelle (x_1, x_2, x_3) und mit welcher Geschwindigkeit $v = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}$ springt die Masse von der Schiene ab, wenn sie eine infinitesimal kleine Anfangsgeschwindigkeit in x_1-Richtung erhält? Benutzen Sie, dass eine Zwangskraft beim Absprung verschwinden muss ($\underline{Z} = 0$) und setzen Sie die daraus resultierende Bedingung und Ihre Ergenisse aus a) in den Energieerhaltungssatz ein.

Weiter auf nächstem Blatt $\longrightarrow$

4. **Bewegung im Rotationsparaboloiden** **(11 Punkte)**

Ein Massenpunkt mit konstanter Masse m bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft $\underline{F} = -mg\underline{e}_3$ auf einem Rotationsparaboloiden mit

$$x_1^2 + x_2^2 = ax_3 \quad \text{mit} \quad a > 0 \quad .$$

(a) Führen Sie Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) ein und stellen Sie die Lagrangefunktion in den generalisierten Koordinaten ρ und φ auf.

(b) Bestimmen Sie die zyklische Koordinate und die zugehörige Erhaltungsgröße p_I. Welche physikalische Bedeutung hat p_I?

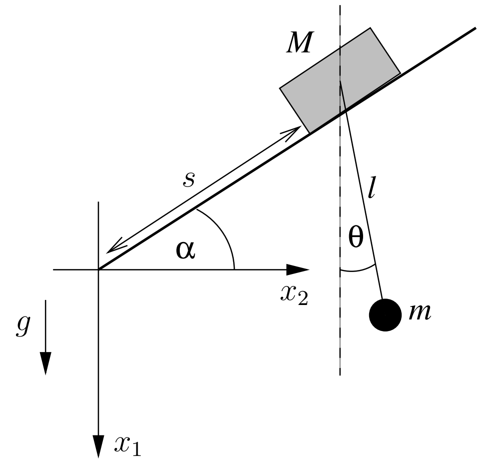
(c) Stellen Sie die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(q_\alpha, p_\alpha, t)$ auf.

(d) Bestimmen Sie die Hamiltonschen Gleichungen und geben sie eine Bewegungsgleichung für ρ in der Form $f(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) = 0$ an. Diese soll *nicht* gelöst werden!

Weiter auf nächstem Blatt $\longrightarrow$

5. **Ein besonderes Pendel** **(10 Punkte)**

Ein Klotz der Masse M gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene. An diesem Klotz ist über einen masselosen Faden der Länge l eine zweite Masse m angehängt.



(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion mit s und θ als generalisierten Koordinaten auf. Nutzen Sie hierfür:

$$\sin(\alpha)\sin(\theta) + \cos(\alpha)\cos(\theta) = \cos(\theta - \alpha)$$

Geben Sie die Bewegungsgleichungen in der Form $\ddot{s} = \ddot{s}(\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta)$ und $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}(\theta, \ddot{s})$ an.

(b) Zeigen Sie, dass es eine Lösung mit konstantem θ_0 gibt und geben Sie diese an.

(c) Bestimmen Sie für $m \ll M$ und kleine Auslenkungen ($|\theta - \alpha| \ll 1$) die Schwingungsfrequenz des Pendels. Nähern Sie zunächst die Bewegungsgleichung $\ddot{s}$ und setzen Sie diese in $\ddot{\theta}$ ein. Nutzen Sie zudem:

$$\sin(\alpha)\cos(\theta - \alpha) - \sin(\theta) = -\cos(\alpha)\sin(\theta - \alpha)$$

Weiter auf nächstem Blatt $\longrightarrow$

6. **Trägheitstensor eines Vollzylinders** **(12 Punkte)**

Wir betrachten einen Zylinder mit Höhe H, Radius R und homogener Massendichte ρ_0 in einem Koordinatensystem, dessen Ursprung in der Mitte der unteren Grundfläche liegt.

(a) Berechnen Sie Masse und Schwerpunkt des Zylinders.

(b) Bestimmen Sie den Trägheitstensor des Zylinders und drücken Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von der Gesamtmasse M aus.

(c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment bei Rotation um die in der Abbildung skizzierten Drehachse $\underline{\omega}$.

(d) Nutzen Sie den Satz von Steiner, um das Trägheitsmoment bei Rotation um eine zur x_1-Achse parallelen Achse zu bestimmen, die durch den Schwerpunkt geht.