INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan
Dipl.-Phys. Björn Willenberg

Thermodynamik und Quantenstatistik WiSe 2013/14

14. Übungsblatt Abgabe: Di, 04.02.2014 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1314/thermo1314`.

40. **Nullpunktsenergie des Vakuums und der Casimir-Effekt (7 Punkte)**
In der Vorlesung wurde die Nullpunktsenergie des Photonengases vernachlässigt. Wir wollen zeigen, dass diese Energie zu einem observablen Effekt führt. Betrachten Sie dazu einen leeren (würfelförmigen) Kasten mit Seitenlängen L.

(a) Berechnen Sie die Nullpunktsenergie W_L des Kastens, indem Sie über alle $\vec{k}$ Zustände summieren. Beachten Sie hierbei, dass es jeweils zwei Polarisationszustände gibt. Mit $L \to \infty$ liegen die einzelnen $\vec{k}$ Vektoren dicht, so dass Sie von der Summation zur Integration übergehen können.

Nun wird der Kasten geteilt, indem an Position R eine leitende Platte eingebracht wird.

(b) Berechnen Sie wie oben die Nullpunktsenergie W_{L-R} des Anteils mit Länge $L-R$.

(c) Berechnen Sie außerdem die Nullpunktsenergie W_R des Anteils mit Kantenlänge R. Hierbei ist zu beachten, dass R endlich bleiben soll, also die Summation nicht (ohne weiteres) durch eine Integration ausgedrückt werden kann.

(d) Berechnen Sie die Differenz $\Delta W = W_L - W_{L-R} - W_R$. Nach geeigneter Umformung sollten Sie

$$\Delta W = -\frac{2\pi^2 c\hbar L^2}{R^3}\int_0^\infty \mathrm{d}x \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sqrt{x+n^2} - \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\sqrt{x+\omega^2}\right)$$

erhalten.

Diese Differenz zweier divergierender Ausdrücke lässt sich auswerten und man erhält ein nicht divergierendes Ergebnis:

$$\Delta W = \frac{\hbar c \pi^2 L^2}{720 R^3}$$

(e) Berechnen Sie die Kraft auf die leitende Platte und vergleichen Sie die Ortsabhängigkeit mit der van-der-Waals-Kraft.

Eine sich im Vakuum befindende leitende Platte erfährt demnach eine Kraft, die nur vom Abstand und von den universellen Konstanten $\hbar$ und c abhängt. Sie hängt nicht von der Elementarladung e ab, welche ein Maß für die Kopplung des elektrischen Feldes an Materie ist.

Bitte wenden! →

41. **Einstein-Phononen (3,5 Punkte)**
In Festkörpern mit mehr als einem Atom pro Gitterpunkt treten neben den in der Vorlesung behandelten akustischen Phononen, die mit der Debye-Theorie näherungsweise beschrieben werden, noch optische Phononen auf. Die einfachste Beschreibung der optischen Phononen geht auf Einstein zurück und geht von einer Phononenzustandsdichte $\Omega(\omega) = \frac{3N}{2}\delta(\omega - \omega_E)$ aus (ω_E ist eine konstante Frequenz).

   (a) Berechnen Sie die mittlere Energie der Phononen.

   (b) Berechnen Sie die spezifische Wärme. Zeigen Sie, dass sich die Phononen bei hohen Temperaturen gemäß der Regel von Dulong und Petit verhalten.

42. **Pauli-Paramagnetismus (9,5 Punkte)**
In einem äußeren Magnetfeld sind die Einteilchenenergien eines nicht wechselwirkenden Fermigases $\epsilon_\sigma(p)$ für die beiden Spinrichtungen $\sigma = \pm 1$ (parallel oder antiparallel zum Magnetfeld) unterschiedlich:

$$\epsilon_\sigma(p) = \frac{p^2}{2m} - \sigma\mu_B B.$$

Wobei μ_B das Bohr'sche Magneton ist. Für beide Spineinstellungen ergeben sich damit unterschiedliche Besetzungszahlen $\langle n_\sigma(p)\rangle$ bei gleichem chemischen Potential μ. Die Magnetisierung und Suszeptibilität sind definiert durch

$$M = \mu_B\left(\langle N_+\rangle - \langle N_-\rangle\right) \text{ mit } N_\sigma = \sum_p n_\sigma(p)$$

und

$$\chi = \chi(T, B) = \left.\frac{\partial M}{\partial B}\right|_{T,N}$$

   (a) Zeigen Sie $\chi(T, B = 0) = \mu_B^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\epsilon\, \Omega'(\epsilon)\, n(\epsilon)$, wobei $\Omega(\epsilon)$ die Zustandsdichte und $n(\epsilon)$ die Fermiverteilung zum chemischen Potential $\mu(T)$ ist.

   (b) Zeigen Sie mit Hilfe der Sommerfeldentwicklung $\mu(T) = \epsilon_F - \frac{\pi^2 k_B^2 T^2}{12\epsilon_F}$ für ein Elektronengas mit $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ und Fermienergie ϵ_F.

   (c) Entwickeln Sie mit der Sommerfeld'schen Methode $\chi(T,0)$ bis zur Ordnung T^2. Die Gesamtteilchenzahl ist natürlich vorgegeben, sodass die in Aufgabenteil (b) berechnete Temperaturabhängigkeit von μ zu berücksichtigen ist.