



13. Übungsblatt

Abgabe: 17. Juli 2015 bis 14 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: P. Meier, Raum A223, Tel.: 391-5189, patrick.meier@tu-bs.de

33. Hamiltonsche Bewegungsgleichungen**(7 Punkte)**

Ein Massenpunkt bewege sich längs der Kurve $x_1^2 + ax_2^3 = 0$ unter Einfluß der Schwerkraft (negative x_2 Richtung). Bestimmen Sie die Hamiltonsche Funktion $\mathcal{H}$ und geben Sie die Hamiltonschen Gleichungen an. Als generalisierte Koordinate verwende man x_2 .

34. Hamilton-Jacobi für den eindimensionalen harmonischen Oszillator**(6 Punkte)**

Die Hamiltonsche Funktion des eindimensionalen harmonischen Oszillator lautet

$$\mathcal{H}(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \quad .$$

- (a) Bestimmen Sie die Wirkungsfunktion mit dem Ansatz $S(q, c, t) = W(q, c) - ct$ aus der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Sie sollten für $W(q, c)$ folgende Lösung erhalten:

$$W(q, c) = \pm \left(\sqrt{\frac{cm}{2}} q \sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2c} q^2} + \frac{c}{\omega} \arcsin \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2c}} q \right) \right)$$

- (b) Die Funktion $S(q, q', t)$ mit $q' = c$ sei die Erzeugende einer kanonischen Transformation. Die Transformationsgleichungen sind dann gegeben durch

$$p' = -\frac{\partial S}{\partial q'} \quad p = \frac{\partial S}{\partial q} \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} \quad .$$

Berechnen Sie zunächst $p(q, q')$ und $p'(q, q')$. Lösen Sie danach das gewonnene Gleichungssystem nach $q(q', p')$ und $p(q', p')$ auf.

- (c) Teigen Sie explizit, dass mit dieser Transformation $\mathcal{H}' = 0$ wird.

35. Trägheitstensor: Inhomogene Kugel**(7 Punkte)**

Gegeben sei eine Kugel mit Radius R und der Massendichte

$$\rho_m = \rho_0(1 + \alpha \cos \theta + \beta \cos^2 \theta)$$

in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) mit $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

- (a) Berechnen Sie die Masse, den Schwerpunkt und den Trägheitstensor der Kugel.
 (b) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment der Kugel, wenn sie um eine zur x_3 -Achse parallelen Achse rotiert, die die Kugel bei $\theta = \pi/2$ berührt.