


 13. Übungsblatt Abgabe: **Fällt aus! Eine Besprechung erfolgt in der Vorlesung am 09.02.2017.**

 Übungsblätter gibt es unter <https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1617/rm1617>.

**42. Taylorentwicklung**

 Sei  $c \in \mathbb{R}$  mit  $c > 0$  und

$$f(x) = \frac{c}{x^{12}} - \frac{c}{x^6}.$$

 Berechnen Sie die Taylorentwicklung von  $f(x)$  bis einschließlich zur dritten Ordnung in  $x$  um  $x = 1$ .

**43. Integrale**

Berechnen Sie zu den folgenden Funktionen die Stammfunktion unter Angabe der Integrationsregeln

(a)

$$f(x) = \frac{x}{x^4 - 1}$$

(b)

$$g(x) = xe^{-x}$$

(c)

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, x < -1$$

**44. Vektoralgebra**

 Seien  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$  drei linear unabhängige Vektoren. Berechnen Sie

$$\langle \vec{c} | \vec{a} \times (\vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{c})) \rangle,$$

 wobei  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt ist.

**45. Orthonormale Funktionensysteme**

 Seien  $n, m \in \mathbb{N}_0$ , die Legendre-Polynome

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

und das Skalarprodukt

$$\langle P_n | P_m \rangle = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx$$

gegeben.

*Bitte wenden! →*

- (a) Zeigen Sie, dass die ersten drei Legendre-Polynome gegeben sind durch:  
 $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$ ,  $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ .
- (b) Zeigen Sie, dass diese drei Legendre-Polynome einen bezüglich des obigen Skalarproduktes orthonormalen Satz von Funktionen bilden.
- (c) Entwickeln Sie die Funktion  $f(x) = \cos(x)$  nach den ersten drei Legendre-Polynomen.

#### 46. Lineare Algebra

- (a) Ein lineares Gleichungssystem sei gegeben durch

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\x_1 - x_3 + x_4 &= 1 \\x_1 - x_2 + x_4 &= 1 \\x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1.\end{aligned}$$

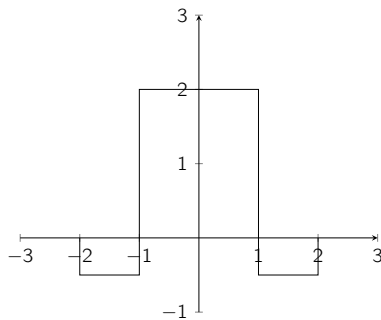
- i. Formulieren Sie das Gleichungssystem mit einer Matrix. Berechnen Sie die Determinante und prüfen Sie, ob das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.
- ii. Geben Sie alle Lösungen für das Gleichungssystem an.
- (b) Gegeben sei die selbstadjungierte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

- i. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren.
- ii. Berechnen Sie die unitäre Matrix  $U$ , mit der  $A' = U^\dagger A U$  diagonal wird. Geben Sie  $A'$  an.

#### 47. Fourierreihe und -transformation

- (a) Eine Funktion sei durch periodische Fortsetzung von



- gegeben. Geben Sie die Fourierreihe an.
- (b) Geben Sie die Definition der Fouriertransformation und die Rücktransformation an.
- (c) Es sei nun eine Funktion  $f(x)$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Skizzieren Sie die Funktion und bestimmen Sie die Fouriertransformierte.

48. **Differentialgleichung**

Eine Differentialgleichung sei gegeben durch:

$$y'y - ay = 0 \quad a > 0$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
- (b) Bestimmen Sie die Lösung für die Anfangsbedingung  $y(0) = \sqrt{2}$ .