INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan

Quantentheorie WS 2014/15

13. Übungsblatt Abgabe: Di, 03.02.2015 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1415/quanten`.

Die Aufgaben auf diesem Zettel dienen der Klausurvorbereitung. Ein Teil der Aufgaben wird in den Übungen besprochen, die restlichen Aufgaben werden in der Vorlesung am Donnerstag den 05.02. besprochen. Beachten Sie, dass die letzten beiden Aufgaben noch Übungspunkte geben!

29. **Gebundener Zustand im asymmetrischen Delta-Potential (keine Punkte)**
Gegeben sei das folgende eindimensionale Potential

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x)$$

mit

$$V_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq a \\ \infty & \text{für } x > a \end{cases} \qquad \text{und} \quad V_2(x) = -W_0 \delta(x)\,,$$

wobei a und W_0 positive reelle Konstanten sind. Wir betrachten nun die (eindimensionale) Bewegung eines Teilchens der Masse m in diesem Potential. Es soll gezeigt werden, dass höchstens eine Lösung der zeitfreien Schrödingergleichung mit der Energie $E < 0$ existiert. Gehen Sie dazu wie folgt vor

(a) Geben Sie die Lösung $\phi(x)$ der stationären Schrödingergleichung in den drei Bereichen $x < 0$, $0 \leq x \leq a$ sowie $a < x$ an.

(b) Leiten Sie die Sprungbedingung für $\phi'(x)$ an der Stelle $x = 0$ her.

(c) Welche weiteren Eigenschaften gelten für die Wellenfunktion $\phi(x)$ für $x \to -\infty$, $x = 0$ und $x = a$?

(d) Lösen Sie das aus den Aufgabenteilen (b) und (c) resultierende Gleichungssystem und zeigen Sie, dass die erlaubten Energiewerte E der Bedingung

$$\exp(2ka) = \frac{\frac{mW_0}{\hbar^2}}{\frac{mW_0}{\hbar^2} - k} \quad \text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$$

genügen.
Hinweis: Eine Normierung der Lösung von $\phi(x)$ ist <u>nicht</u> verlangt!

(e) Zeigen Sie anhand einer grafischen Lösung der Gleichungen aus Aufgabenteil (d):
Ist die Ungleichung

$$\frac{\hbar^2}{mW_0} < 2a$$

erfüllt, so existiert <u>genau ein</u> gebundener Zustand. Ist die Ungleichung <u>nicht</u> erfüllt so existiert <u>kein</u> gebundener Zustand.

Bitte wenden! →

30. **Messprozess: Stern-Gerlach-Experiment (keine Punkte)**
Die drei Pauli-Matrizen σ_x, σ_y und σ_z spannen zusammen mit der 2×2 Einheitsmatrix $\mathbb{1}_2$ den Raum der komplexen 2×2 Matrizen auf. Sie sind definiert als

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Die Wechselwirkung zwischen einem sogenannten "Spin"-1/2 Teilchen mit Masse m und einem Magnetfeld B in y-Richtung wird beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$H_s = -C\sigma_y,$$

wobei $C = \frac{eB\hbar}{2mc}$ ist. Stellen Sie H_s sowie den Zeitentwicklungsoperator

$$U(t) = e^{\frac{-iH_s t}{\hbar}}$$

als 2×2-Matrizen dar indem Sie zunächst H_s diagonalisieren und anschließend den Zeitentwicklungsoperator bestimmen.

(b) Geben Sie die Eigenwerte und -vektoren der drei Pauli-Matrizen an.

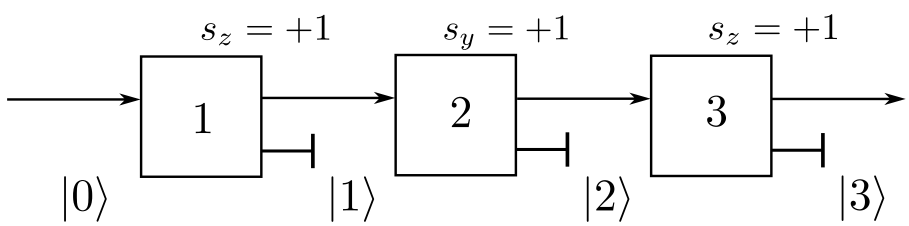
(c) Der Spin-Zustand $s_\alpha \in \mathbb{R}$ bezüglich der Richtung $\alpha = x, y, z$ wird definiert als Eigenwert der Pauli-Matrix σ_α, d.h.

$$\sigma_\alpha \, | s_\alpha \rangle = s_\alpha \, | s_\alpha \rangle .$$

Ein freies Teilchen ($B = 0$, d.h. Spin-Anteil des Hamilton-Operators $H_s = 0$) werde nun im $s_z = +1$ Zustand präpariert

$$| 0 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nun werden nacheinander drei Stern-Gerlach-Experimente durchgeführt:



Bei einer ersten Messung wird bestimmt, ob das Teilchen im Zustand $s_z = +1$ bzgl. der z-Richtung ist, in der zweiten, ob der Zustand $s_y = +1$ bzgl. der y-Richtung ist und schließlich in der dritten noch einmal, ob der Zustand $s_z = +1$ bzgl. der z-Richtung ist.

i. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, mit dem gegebenen Anfangszustand $| 0 \rangle$, das Teilchen bei der ersten Messung im Zustand $s_z = +1$ zu finden. Wie lautet der Zustand $| 1 \rangle$ nach dieser ersten Messung?

ii. Wie ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei der zweiten Messung im Zustand $s_y = +1$ zu finden und wie lautet der Zustand $| 2 \rangle$ nach dieser Messung?

iii. Wie ist die Wahrscheinlichkeit bei der dritten Messung noch einmal den Zustand $s_z = +1$ zu messen?

Nächste Seite! →

31. **Wasserstoffatom (keine Punkte)**
Wir betrachten die radiale Schrödingergleichung, welche für ein Zentralpotential $V(r)$ gegeben ist durch

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r^2}\chi_\ell(r)+\left[\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2}+V(r)\right]\chi_\ell(r)=E\chi_\ell(r).$$

(a) Für $r\to 0$ sind die relevanten Terme der Gleichung (Warum?)

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)\chi_\ell(r)=0\,.$$

Geben Sie die beiden Lösungen dieser Gleichung an.

(b) Für $r\to\infty$ sind die relevanten Terme der Gleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\right)\chi_\ell(r)=0\,.$$

Geben Sie die Lösungen dieser Gleichung an und machen Sie dabei eine Fallunterscheidung zwischen gebundenen und ungebundenen Zuständen.

(c) Zeigen Sie, dass für den Fall des Wasserstoffatoms mit $V(r)=-\frac{e^2}{r}$ (Coulomb-Potential) sich die radiale Schrödingergleichung schreiben lässt zu

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}\chi_\ell(\rho)+\left[\varepsilon+\frac{2}{\rho}-\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right]\chi_\ell(\rho)=0\,.$$

Wie sind ε und ρ definiert?

(d) Motiviert durch das Ergebnis aus den Aufgabenteilen (a) und (b) machen wir folgenden Potenzreihenansatz für die Lösung der radialen Schrödingergleichung

$$\chi_\ell(r)=\rho^{\ell+1}\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}c_\mu\rho^\mu\right)e^{-\lambda\rho}\quad\text{mit }\lambda=\sqrt{-\varepsilon}\,.$$

Setzen Sie diesen Ansatz in die radiale Schrödingergleichung des Wasserstoffatoms ein und leiten Sie durch einen Vergleich der Koeffizienten gleicher ρ-Potenzen eine Rekursionsrelation für die c_μ her.

(e) Zeigen Sie, dass die Folge der c_μ's abbrechen muss und leiten Sie aus der Abbruchbedingung den bekannten Ausdruck für die Energieeigenwerte des Wasserstoffatoms E_n her

$$E_n=-\frac{e^2}{2a_0}\frac{1}{n^2}\,,\qquad n=n_r+\ell+1\,,\qquad a_0=\frac{\hbar^2}{me^2}\,.$$

Bitte wenden! →

32. **Clebsch-Gordan Koeffizienten (keine Punkte)**
Wir koppeln zwei Drehimpulse $\vec{J_1}$ und $\vec{J_2}$ mit $j_1 = 1$, $j_2 = 1/2$. Drücken Sie die normierte Basis $|\, j_1 = 1, j_2 = 1/2, j, m\,\rangle$ durch die Zustände $|\, j_1 = 1, j_2 = 1/2, m_1, m_2\,\rangle$ aus. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

i. Überlegen Sie sich zunächst wieviele verschiedene Zustände es zu $|\,1, 1/2, j = 3/2, m\,\rangle$ und $|\,1, 1/2, j = 1/2, m\,\rangle$ gibt (Hinweis: Welche Quantenzahlen m sind erlaubt?).

ii. Starten Sie mit dem Zustand $|\, j_1 = 1, j_2 = 1/2, j = 3/2, m = 3/2\,\rangle$ und begründen Sie, dass gilt

$$|\, j_1 = 1, j_2 = 1/2, j = 3/2, m = 3/2\,\rangle = |\, j_1 = 1, j_2 = 1/2, m_1 = 1, m_2 = 1/2\,\rangle\,.$$

iii. Die Zustände $|\,1, 1, j = 3/2, m\,\rangle$ lassen sich durch Anwendung von J^- konstruieren, wobei gilt

$$J^- \,|\, j_1, j_2, j, m\,\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,|\, j_1, j_2, j, m-1\,\rangle\,.$$

iv. Der Zustand $|\,1, 1, j = 1/2, m = 1/2\,\rangle$ wird so gewählt, dass er orthonormal zu $|\,1, 1, j = 3/2, m = 1\,\rangle$ ist. Wiederholen Sie die Schritte ii.-iv. bis alle Zustände konstruiert sind.

33. **Zeitunabhängige Störungstheorie (9 Punkte)**
Wir betrachten ein Teilchen im eindimensionalen Potentialtopf

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(x) \qquad \text{mit } V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } |x| > a, \\ 0 & \text{für } |x| < a. \end{cases}$$

Die Eigenwerte von H_0 sind

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 \qquad \text{mit } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Die dazugehörigen normierten Eigenfunktionen lauten

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) \quad \text{für ungerade } n\,; \qquad \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) \quad \text{für gerade } n\,.$$

Weiterhin wird eine konstante Kraft als Störung angelegt

$$W(x) = \lambda x$$

Zeigen Sie unter Verwendung stationärer Störungstheorie, dass die Grundzustandsenergie bis zu zweiter Ordnung in λ wie folgt lautet

$$E_{GS} = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2} - \lambda^2\frac{a^4 m}{\hbar^2}\left(\frac{10}{\pi^4} - \frac{2}{3\pi^2}\right) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

Nächste Seite! →

34. **Zeitabhängige Störungstheorie: Rabi-Oszillationen (11 Punkte)**
Wir betrachten ein System, das wichtige Anwendungen z.B. auf Kernspin-Resonanz und Maser besitzt: Ein Zwei-Niveau-System mit $E_1 > E_2$, bei dem eine zeitabhängige Störung $W(t)$ Übergänge induziert ($\gamma \in \mathbb{R}$):

$$W_{1,1} = W_{2,2} = 0, \qquad W_{1,2} = \gamma e^{i\omega t}, \qquad W_{2,1} = \gamma e^{-i\omega t}\,.$$

Zur Zeit $t_0 = 0$ sei nur der Zustand mit der Energie E_1 besetzt, d.h. $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$.

(a) Berechnen Sie $|c_1(t)|^2$ sowie $|c_2(t)|^2$ mittels zeitabhängiger Störungstheorie erster Ordnung.

(b) Wir nehmen hier ohne Beweis zur Kenntnis, dass die exakte Lösung des Problems auf die Rabi-Formel

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\gamma^2}{\hbar^2\Omega^2}\sin^2(\Omega t)\,, \quad |c_1(t)|^2 = 1 - |c_2(t)|^2 \tag{1}$$

führt, mit

$$\Omega = \sqrt{\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\delta\omega)^2}{4}}\,, \quad \delta\omega = \omega - \omega_{2,1}\,, \quad \omega_{2,1} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}\,. \tag{2}$$

Entwickeln Sie die Gleichungen in (1) und (2) nach γ und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe (a). Beachten Sie dabei insbesondere die Fälle $\gamma \gg \hbar\,\delta\omega$ und $\gamma \ll \hbar\,\delta\omega$.

(c) Skizzieren Sie unter Verwendung von Gleichung (1) $|c_1(t)|^2$ und $|c_2(t)|^2$ im Resonanzfall ($\omega = \omega_{2,1}$). Diskutieren Sie die Skizze kurz unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitsinterpretation.