INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan
Dipl.-Phys. Björn Willenberg

Thermodynamik und Quantenstatistik WiSe 2013/14

# 13. Übungsblatt

Abgabe: Di, 28.01.2014 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1314/thermo1314`.

36. **Das van-der-Waals-Gas und kritische Exponenten**
In der van-der-Waals-Theorie wird ein reales Gas durch die van-der-Waals'sche Zustandsgleichung beschrieben:

$$Nk_BT = \left(P + \frac{aN^2}{V^2}\right)(V - bN),$$

wobei $a, b$ Konstanten sind, die man aus der Virialentwicklung gewinnt.[1]

(a) Bringen Sie die van-der-Waals'sche Zustandsgleichung in die reduzierte Form. Bestimmen Sie dafür die Werte am kritischen Punkt $(P_c, V_c, T_c)$.

(b) Nutzen Sie eine geeignete Taylorentwicklung um den kritischen Punkt des van-der-Waals-Gases herum und zeigen Sie, dass der Druck entlang der kritischen Isothermen $(T = T_c)$ durch ein Potenzgesetz beschrieben werden kann:

$$P - P_c \propto (n - n_c)^\delta.$$

Bestimmen Sie auch den kritischen Exponenten $\delta$.

(c) Bestimmen Sie analog für die Kompressibilität $\kappa_T$ die Temperaturabhängigkeit nahe der kritischen Temperatur $T_c$ wobei $V = V_c$ gelten soll. Sie sollten folgendes Potenzgesetz erhalten:

$$\kappa_T \propto (T - T_c)^{-\gamma}.$$

37. **Der Joule-Thomson-Effekt**
Im Gegensatz zur in der Vorlesung behandelten Situation des idealen Gases ändert sich bei der isenthalpen Entspannung eines realen Gases, z.B. durch eine Drossel, die Temperatur. Dies ist der sogenannte Joule-Thomson Effekt.

(a) Zeigen Sie für ein van-der-Waals-Gas, das entlang der Inversionskurve des Joules-Thomson Prozesses, die durch $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = 0$ bestimmt ist, folgender Zusammenhang gilt:

$$\frac{2a}{k_BT}\left(\frac{V - Nb}{V}\right)^2 = b.$$

(b) Lösen Sie die Gleichung in (a) nach $V$ auf und bestimmen Sie damit die Inversionskurve $P_{\text{Inv}} = P_{\text{Inv}}(T)$ skizzieren Sie das Ergebnis in einem $P$-$T$-Diagramm.

*Bitte wenden!* →

[1] $a$ ist als Kohäsionsdruck und $b$ als Kovolumen bekannt

38. **Fermionen und Fermiverteilung**
Die Entropie eines Systems sei gegeben durch

$$S = -k \sum \{ \langle n_s(\vec{p}) \rangle \ln \langle n_s(\vec{p}) \rangle + [1 - \langle n_s(\vec{p}) \rangle] \ln[1 - \langle n_s(\vec{p}) \rangle] \} .$$

Finden Sie die Verteilung $\langle n_s(\vec{p}) \rangle$,bei der die Entropie maximal wird unter den Nebenbedingungen $\sum \langle n_s(\vec{p}) \rangle = N$ und $\sum \epsilon_s(\vec{p}) \langle n_s(\vec{p}) \rangle = E$.

39. **Thermodynamische Herleitung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes**
Neben der in der Vorlesung gezeigten statistischen Herleitung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes gibt es noch eine rein thermodynamische. Hierzu wird zunächst der Zusammenhang $3PV = E$ klassisch hergeleitet.

(a) Betrachten Sie den (elastischen) Stoß eines Photons an einer Wand. Berechnen Sie den Impulsübertrag pro Zeitintervall in Abhängigkeit der Einfallswinkel $\phi$ und $\theta$.

(b) Berechnen Sie außerdem die Zahl der pro Zeitintervall mit der Wand stoßenden Photonen. Auch dieses Ergebnis sollte eine Funktion von $\phi$ und $\theta$ sein.

(c) Mitteln Sie nun den Gesamtimpulsübertrag über den Raumwinkel. Sie sollten $3PV = E$ gezeigt haben.

(d) Zeigen Sie, dass $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$ gilt.

(e) Nehmen Sie an, dass $E = V f(T)$. Hiermit und mit den Ergebnissen der vorherigen Aufgabenteile sollten Sie nun das Stefan-Boltzmann-Gesetz bis auf eine Konstante erhalten.