Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. M. Feyerabend

13. Übungsblatt — Abgabe: 29. Juni 2016 bis 9.40 Uhr im Kasten vor 3.317

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

26. Kanonische Transformation (7 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Transformation

$$\begin{aligned} p_1' &= p_1 \qquad & q_1' &= q_1 - p_1 \\ p_2' &= p_2 \qquad & q_2' &= q_2 - p_2 \\ p_3' &= p_3 \qquad & q_3' &= q_3 - p_3 \end{aligned}$$

kanonisch ist. $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ sind nicht explizit zeitabhängig.

(b) Die Hamiltonsche Funktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) \quad .$$

Transformieren Sie die kanonisch konjugierten Variablen q, p in die neuen kanonisch konjugierten Variablen q', p' mittels einer kanonischen Transformation, deren Erzeugende durch

$$R = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot q'$$

gegeben ist. Geben Sie die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}'(q', p')$ an und lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in diesen neuen kanonisch konjugierten Variablen. Transformieren Sie danach die Lösung wieder auf die alten kanonisch konjugierten Variablen q und p. Nutzen Sie die Konservativität des Systems, die Gesamtenergie ist U.

27. Hamilton-Jacobi-Gleichung für den eindimensionalen harmonischen Oszillator (8 Punkte)

Die Hamiltonsche Funktion des eindimensionalen harmonischen Oszillator lautet

$$\mathcal{H}(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \quad .$$

(a) Bestimmen Sie die Wirkungsfunktion mit dem Ansatz $S(q,q',t) = W(q,q') - q't$ aus der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Sie sollten für $W(q,q')$ folgende Lösung erhalten:

$$W(q,q') = \pm\left(\sqrt{\frac{q'm}{2}}\, q \sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2q'} q^2} + \frac{q'}{\omega} \arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2q'}}\, q\right)\right)$$

(b) Die Funktion $S(q,q',t)$ ist die Erzeugende einer kanonischen Transformation. Die Transformationsgleichungen sind dann gegeben durch

$$p' = -\frac{\partial S}{\partial q'} \qquad p = \frac{\partial S}{\partial q} \qquad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} \quad .$$

Berechnen Sie zunächst $p(q,q')$ und $p'(q,q')$. Lösen Sie danach das gewonnene Gleichungssystem nach $q(q',p')$ und $p(q',p')$ auf.

(c) Zeigen Sie explizit, dass mit dieser Transformation $\mathcal{H}' = 0$ wird.

Bitte wenden→

28. **Satz von Liouville** **(5 Punkte)**

Wir betrachten die eindimensionale Bewegung eines Teilchens. Der Ort x und der Impuls p des Teilchens entspricht einem Punkt im Phasenraum. Wir betrachten nun dieses Teilchen wiederholt unter leicht veränderten Anfangsbedingungen. Diese seien gleichmäßig verteilt im Bereich $0 \leq x \leq x_{max}$ und $0 \leq p \leq p_{max}$.

Berechnen und Skizzieren Sie, wie sich die Grenzen des besetzten Phasenraumbereichs im Laufe der Zeit verschieben. Zeigen Sie, dass das Volumen dieses Phasenraumbereichs konstant ist. Betrachten Sie hierzu

(a) kräftefreie Teilchen

(b) Teilchen im Schwerefeld $\underline{g} = g\underline{e}_x$.