Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. P. Meier

13. Übungsblatt — Abgabe: 4. Februar bis 9.40 Uhr im Kasten vor A317

35. **Casimir-Effekt** **(6 Punkte)**

In der Vorlesung wurde die Nullpunktsenergie des Photonengases vernachlässigt. In dieser Aufgabe soll nun gezeigt werden, dass diese Nullpunktsenergie sehr wohl observabel ist. Betrachten Sie dazu einen leeren (würfelförmigen) Kasten mit Kantenlänge L.

(a) Konstruieren Sie die Formel für die Berechnung der Nullpunktsenergie U_L des Kastens, indem Sie über alle mögliche Wellenvektoren $\underline{k}$ und Polarisationen σ der Photonen summieren. Bei außreichend großem L betrachten wir ein thermodynamisch großes System, sodass Sie von der Summation zur Integration übergehen können.

Hinweis: Die in der Vorlesung durchgeführte Summation bzw. Integration über die Energie ϵ oder die Frequenz ω ist jetzt über den Wellenvektor (k_x, k_y, k_z) vorzunehmen. Ignorieren Sie, dass die Ausdrücke gegebenenfalls divergieren.

Nun wird der Kasten geteilt, indem an der Position $z = R$ eine leitende Platte eingebracht wird.

(b) Wiederholen Sie die Konstruktion aus (a) für die Nullpunktsenergie U_{L-R} des Teils mit der Länge $L - R$.

(c) Konstruieren Sie nun eine Formel ür die Nullpunktsenergie U_R des Teils mit der Kantenlänge R. Hierbei soll R allerdings so klein gewählt werden, dass die Summation über k_z nicht mehr durch eine Integration ersetzt werden kann.

(d) Zeigen Sie, dass sich die Differenz $\Delta U = U_L - U_{L-R} - U_R$ schreiben lässt als

$$\Delta U = -\frac{\pi^2 \hbar c L^2}{4R^3} \int_0^\infty dx \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x + n^2} - \int_0^\infty d\omega \sqrt{x + \omega^2} \right]$$

Diese Differenz zweier divergierender Ausdrücke lässt sich auswerten (nicht gefordert) und man erhält bemerkenswerterweise ein nicht divergierendes Ergebnis:

$$\Delta U = \frac{\pi^2 \hbar c L^2}{720 R^3} \quad .$$

(e) Berechnen Sie die Kraft auf die leitende Platte.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Platte aus dem Unendlichen bis zur Position $z = R$ bewegt wird. ΔU entspricht dann der Arbeit die hierbei geleistet wird.

Bitte wenden ⟶

36. **Debye-Approximation** **(10 Punkte)**

Einen Festkörper aus N Atomen kann man näherungsweise als ein System von $3N$ ungekoppelten, linearen harmonischen Oszillatoren betrachten. Die Frequenzen dieser Oszillatoren bezeichnen wir mit ω_j, wobei $j = 1, 2, \ldots, 3N$ ist. Grundlegende Annahme des *Einstein-Modells* (siehe Aufgabe 25) war $\omega_j = \omega_E$ für alle j. Im *Debye-Modell* wird dagegen für jeden Oszillator eine lineare Dispersionsrelation angesetzt mit

$$\omega_m = v q_m \quad ,$$

wobei v die konstante und für alle Moden gleiche Schallgeschwindigkeit bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie die Zustandsdichte $D(\omega)$ in der Debye-Theorie. Warum können Sie dabei analog zum Fermi- und Bosegas vorgehen?

(b) Die *Debye-Funktion* ξ ist durch

$$\xi(y) = \frac{3}{y^3} \int_0^y \frac{x^3 \, \mathrm{d}x}{\exp(x) - 1}$$

definiert. Drücken Sie $\ln \mathcal{Z}$ und U durch ξ und die Debye-Temperatur Θ aus.

(c) Nutzen Sie die Ergebnisse von Teil (b) nun zur Bestimmung von C_V im Rahmen der Debye-Theorie.

i. Zeigen Sie, dass sich im Grenzfall $T \gg \Theta$ das Gesetz von Dulong-Petit ergibt. Ist dieses Resultat abhängig von der konkreten Form der Zustandsdichte?

ii. Bestimmen Sie C_V im Grenzfall $T \ll \Theta$.
Hinweis: $\int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{x^3}{\exp(x)-1} = \frac{\pi^4}{15}$.

37. **Tripelpunkt von Wasser** **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie approximativ den Tripelpunkt von Wasser mit Hilfe der unten angegebenen Messdaten. Entwickeln Sie dazu $p(T)$ um T_0 bis zur ersten Ordnung. Geben Sie zum Vergleich auch die Literaturwerte für Temperatur und Druck am Tripelpunkt an.

Ein paar experimentelle Daten zu Wasser:

- Der Dampfdruck von Wasserdampf beträgt $p_1 = 6.105 \cdot 10^2$ Pa bei $T_1 = 0°\mathrm{C}$ und $p_2 = 6.567 \cdot 10^2$ Pa bei $T_2 = 1°\mathrm{C}$.
- Die spezifischen Volumina von Eis und Wasser sind bei $T_0 = 0°\mathrm{C}$ und $p_0 = 1.013 \cdot 10^5$ Pa $V_{Eis} = 1.091 \cdot 10^{-3}$ m^3/kg sowie $V_{Wasser} = 1.000 \cdot 10^{-3}$ m^3/kg.
- Die latente Wärme von Eis ist $l_m = 334.94$ kJ/kg.