INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan

Quantentheorie WS 2014/15

12. Übungsblatt Abgabe: Di, 27.01.2015 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1415/quanten`.

29. **Störungstheorie I (6 Punkte)**
Wir betrachten eine 3×3 Matrix $H = H_0 + W \quad (\lambda \in \mathbb{R})$:

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad W = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $H = H_0 + W$ mit Hilfe der störungstheoretischen Formeln aus der Vorlesung bis zur zweiten Ordnung in λ.

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von H. Setzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabenteil (a) ein und prüfen Sie, dass die Terme bis einschließlich der Ordnung λ^2 verschwinden.

30. **Störungstheorie II: Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld (7 Punkte)**
Auf einen harmonischen Oszillator (z.B. ein Ion der Ladung q) wirke ein schwaches, konstantes elektrisches Feld E parallel zur Bewegungsrichtung. Somit lautet der Hamilton-Operator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - qEx \, .$$

Wir wollen nun die Energieniveaus dieses Systems mit Hilfe der stationären Störungstheorie ermitteln, dabei betrachten wir den Term $W(x) = -qEx$ als Störung.

(a) Bestimmen Sie die Korrekturen der Eigenzustände zum ungestörten harmonischen Oszillator bis zur ersten Ordnung im elektrischen Feld E.
Hinweis: Es macht Sinn die Rechnung in der Besetzungszahldarstellung durchzuführen. Sie müssen in der Rechnung Terme $\langle\, n \mid x \mid m \,\rangle$ bestimmen, wobei $|\, n\,\rangle, |\, m\,\rangle$ die Eigenzustände des ungestörten harmonischen Oszillators sind.

(b) Berechnen Sie die Energiekorrekturen zum ungestörten harmonischen Oszillator bis zur zweiten Ordnung im elektrischen Feld E.

(c) Bestimmen Sie die exakten Energieeigenwerte nun ohne Störungsrechnung, indem Sie eine geeignete quadratische Ergänzung in H einfügen. Verschwindet die Energiekorrektur dritter Ordnung in E?

Bitte wenden! →

31. **Störungstheorie III: Teilchen im periodischen Potential (7 Punkte)**

Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem eindimensionalen periodischen Potential $W(x)$:

$$W(x+a) = W(x)\,.$$

Das Problem soll hier unter Betrachtung von $W(x)$ als Störung zu

$$H_0 = \frac{p^2}{2m}$$

behandelt werden.

(a) Geben Sie die ungestörten Energien $E_0(k)$ und Eigenfunktionen $\psi_k(x)$ von H_0 an. Welche Werte für k sind in einem Volumen $L = Na$ mit periodischen Randbedingungen

$$\psi_k(x + N\,a) = \psi_k(x)$$

zugelassen? Normieren Sie die Wellenfunktionen in diesem endlichen Volumen der Länge L.

(b) Wie oft ist jeder ungestörter Energieeigenwert $E_0(k)$ entartet?
Hinweis: Achten Sie auch auf Spezialfälle für k.
Welche Wellenzahlen K treten in der Fourier-Zerlegung von $W(x)$ auf?

(c) Leiten Sie eine notwendige Bedingung an k und k' dafür her, dass

$$\langle\, \psi_k \,|\; W \;|\psi_{k'}\,\rangle \neq 0\,.$$

Unter welcher Bedingung haben $|\,\psi_k\,\rangle$ und $|\,\psi_{k'}\,\rangle$ außerdem dieselbe Energie bezüglich H_0? Geben Sie für den Fall der Entartung eine Beziehung zwischen k und K an.

(d) Berechnen Sie die Korrekturen $E_k^{(1)}$ erster Ordnung zur Energie. Führen Sie dabei eine Fallunterscheidung unter Beachtung der Entartung durch. Wann ist die Entartung unproblematisch und wann müssen Sie geeignete Kombinationen von $|\,\psi_k\,\rangle$ und $|\,\psi_{k'}\,\rangle$ als Ausgangspunkt der Rechnung wählen (Zustände angeben!)?

Bemerkung: Oben wird ein allgemeines (eindimensionales) Bandmodell für Festkörper diskutiert (vgl. das Kronig-Penny-Modell bei dem 4.Übungsblatt): Durch Kopplung bestimmter k-Punkte über das Potential W ergeben sich dort Lücken und man erhält verschiedene Bänder.