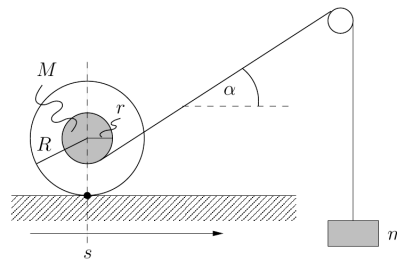


30. Die Garnrolle

(7 Punkte)

Man bestimme die Bewegungsgleichung für eine Garnrolle (siehe Skizze). Die Garnrolle besteht aus zwei Scheiben mit Radius R und vernachlässigbarer Masse und einem inneren Zylinder mit Radius $r < R$ und Masse M , auf dem ein Faden aufgewickelt wird. Die äußeren Scheiben rollen reibungsfrei auf einer Unterlage, ohne zu Rutschen, d.h. der Gleitreibungswiderstand ist unendlich groß, der Rollreibungswiderstand sei vernachlässigbar. Auf die Masse m wirkt die Schwerkraft. Der in der Skizze eingezeichnete Winkel α sei als konstant angenommen (das gilt näherungsweise, wenn die Länge des abgerollten Fadens bis zur Umlenkrolle sehr groß ist gegenüber dem Radius R).



- Geben Sie die Lagrangefunktion des Gesamtsystems als Funktion der generalisierten Koordinate s (Position der Garnrolle) an.
Hinweise: Die Höhenänderung der Masse m wird durch Translation und Drehung der Garnrolle verursacht. Zudem ist die Rotationsenergie der Rolle durch $T_{rot} = 1/2 \Theta \dot{\varphi}^2$ mit $\Theta = 1/2 M r^2$ gegeben.
- Leiten Sie die Bewegungsgleichung für s ab.
- Die Rolle sei zu Beginn des Vorgangs in Ruhe ($s(t=0) = 0$). Für kleine Winkel α würde die Rolle nach rechts loslaufen, während sie für große α nach links läuft. Bestimmen Sie den Grenzwinkel α_c .

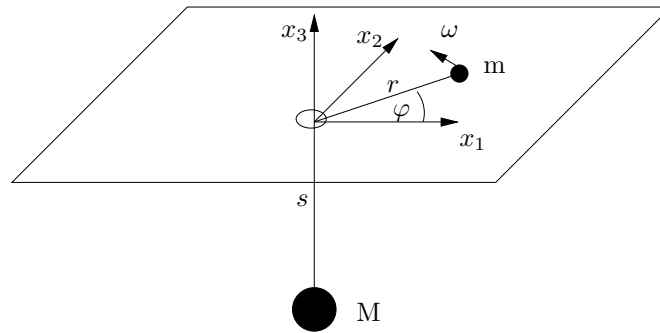
31. Zwei verbundene Massen und ein Loch im Tisch

(7 Punkte)

Zwei Massen m und M sind durch einen Faden mit der konstanten Gesamtlänge $l = r + s$ verbunden, wobei die Masse des Fadens vernachlässigt werden kann (siehe Skizze nächste Seite). Die Masse m kann an dem Faden (mit der variierenden Teillänge r) auf der Ebene rotieren. Der Faden führt von m durch ein Loch in der Ebene zu M , wobei die Masse M an dem straff gespannten Faden (mit der ebenfalls veränderlichen Teillänge $s = l - r$) hängt. Dabei soll sich die Masse M nur in Richtung der x_3 -Achse bewegen können.

- Stellen Sie Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen auf.
- Zeigen Sie, dass der Drehimpuls L in der Zeit erhalten bleibt.
- Bestimmen Sie in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit ω oder des Drehimpulses L , wann die Masse M nach oben bzw. nach unten rutscht.

Bitte wenden $\rightarrow$



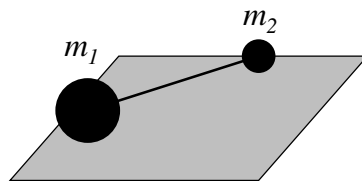
32. Lagrange-Mechanik

(6 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Situationen geeignete generalisierte Koordinaten, die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichungen an. In allen Teilen wirkt als äußere Kraft die Schwerkraft. Die Bewegungsgleichungen sollen **nicht** gelöst werden!

- (a) Zwei Massen m_1 und m_2 , verbunden mit einer masselosen Stange (Hantel), die auf einer reibungsfreien Eisfläche gleiten.
- (b) Ein Pendel mit einer Feder (Federkonstante D) als "Faden" (zweidimensional). Die Feder soll sich nicht verbiegen.

(a)



(b)

