Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. M. Feyerabend

12. Übungsblatt Abgabe: 25. Januar bis 9:45 Uhr im Kasten vor 3.317

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

32. **Casimir-Effekt** **(12 Punkte)**

In der Vorlesung wurde die Nullpunktsenergie des Photonengases vernachlässigt. In dieser Aufgabe soll nun gezeigt werden, dass diese Nullpunktsenergie sehr wohl observabel ist. Betrachten Sie dazu einen leeren (würfelförmigen) Kasten mit Kantenlänge L. In z-Richtung liegt der Kasten zwischen $z = 0$ und $z = L$.

(a) Konstruieren Sie die Integral-Formel (3-fach Integral) für die Berechnung der Nullpunktsenergie U_L des Kastens, indem Sie über alle mögliche Wellenvektoren $\underline{k}$ und Polarisationen σ der potentiell möglichen Photonen summieren. Bei ausreichend großem L betrachten wir ein thermodynamisch großes System, sodass Sie von der Summation zur Integration übergehen können.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass nur solche Photonen auftreten können, wenn ganzzahlige Vielfache deren halber Wellenlänge genau in den Kasten passen. In der Vorlesung wurden für das Abzählen der erlaubten Zustände die Modenindizes m_x, m_y, m_z benutzt.
Hinweis: Die mehrfach in der Vorlesung durchgeführte Summation bzw. Integration über die Energie ϵ ist jetzt über den Wellenvektor (k_x, k_y, k_z) vorzunehmen. Belassen Sie es bei kartesischen Koordinaten im k-Raum und gehen Sie nicht wie häufig üblich zu Kugelkoordinaten über. Ignorieren Sie, dass die Ausdrücke gegebenenfalls divergieren.

Nun wird der Kasten geteilt, indem an der Position $z = R$ eine leitende Platte eingebracht wird.

(b) Wiederholen Sie die Konstruktion aus (a) für die Nullpunktsenergie U_{L-R} des Teils mit der Länge $L - R$.

(c) Konstruieren Sie nun eine Formel für die Nullpunktsenergie U_R des Teils mit der Kantenlänge R. Hierbei soll R allerdings so klein gewählt werden, dass die Summation über k_z nicht mehr durch eine Integration ersetzt werden kann. Behalten Sie an dieser Stelle die Summation über den Modenindex m_z bei.

(d) Zeigen Sie, dass sich die Differenz $\Delta U = U_L - U_{L-R} - U_R$ schreiben lässt als

$$\Delta U = -\frac{\pi^2 \hbar c L^2}{4R^3} \int\limits_0^\infty dx \left[\sum_{m_z=0}^{\infty} \sqrt{x + m_z^2} - \int\limits_0^\infty dy \sqrt{x + y^2} \right]$$

Hinweis: Führen Sie für die verbleibende Integration in der $k_x - k_y$-Ebene ebene Polarkoordinaten ein.
Diese Differenz zweier divergierender Ausdrücke lässt sich auswerten (nicht gefordert) und man erhält bemerkenswerterweise ein nicht divergierendes Ergebnis:

$$\Delta U = \frac{\pi^2 \hbar c L^2}{720 R^3} \quad (*)$$

(e) Berechnen Sie vermöge der Gleichung $(*)$ die Kraft auf die leitende Platte.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Platte aus dem Unendlichen bis zur Position $z = R$ bewegt wird. ΔU entspricht dann der Arbeit, die hierbei geleistet wird.

Bitte wenden ⟶

33. **Barometrische Höhenformel: Photonengas** **(8 Punkte)**

Ein Photonengas sei dem Gravitationsfeld der Erde ausgesetzt.

Es soll eine barometrische Höhenformel für Photonen in einem Gravitationsfeld nach Newtonscher Physik abgeleitet werden. Betrachten Sie ein Höhenelement dz und setzen Sie die auftretenden Kräfte gleich (von der z-Abhängigkeit von g sehe man ab). Daraus erhält man eine Gleichung für den Druck. Bestimmen Sie daraus die höhenabhängige Verteilung der Dichte der Inneren Energie $u(z)$.

Hinweis: Die Photonen besitzen zwar keine Ruhemasse, aber eine dem Gravitationsfeld ausgesetzte mittlere Masse lässt sich aus der Inneren Energie beschaffen. Durch die Gravitationswirkung befinden sich im unteren Teil des Höhenelementes dz mehr Photonen als im oberen.