INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
M. Feyerabend, M.Sc.

THEORETISCHE MECHANIK | SS 2016

12. Übungsblatt | Abgabe: 30. Juni 2016 bis 9.40 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum A317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

31. Hamiltonsche Bewegungsgleichungen **(7 Punkte)**

Ein Massenpunkt bewege sich längs der Kurve $x_1^2 + a x_2^3 = 0$ unter Einfluß der Schwerkraft $\underline{F} = -\, m\, g\, \underline{e}_2$. Bestimmen Sie die Hamiltonsche Funktion $\mathcal{H}$ und geben Sie die Hamiltonschen Gleichungen an. Als generalisierte Koordinate verwende man x_2.

32. Hamilton-Jacobi für den eindimensionalen harmonischen Oszillator **(6 Punkte)**

Die Hamiltonsche Funktion des eindimensionalen harmonischen Oszillator lautet

$$\mathcal{H}(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \quad .$$

(a) Bestimmen Sie die Wirkungsfunktion mit dem Ansatz $S(q,c,t) = W(q,c) - ct$ aus der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Sie sollten für $W(q,c)$ folgende Lösung erhalten:

$$W(q,c) = \pm \left(\sqrt{\frac{cm}{2}} q \sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2c} q^2} + \frac{c}{\omega} \arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2c}} q \right) \right)$$

(b) Die Funktion $S(q,q',t)$ mit $q' = c$ sei die Erzeugende einer kanonischen Transformation. Die Transformationsgleichungen sind dann gegeben durch

$$p' = -\frac{\partial S}{\partial q'} \qquad p = \frac{\partial S}{\partial q} \qquad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} \quad .$$

Berechnen Sie zunächst $p(q,q')$ und $p'(q,q')$. Lösen Sie danach das gewonnene Gleichungssystem nach $q(q',p')$ und $p(q',p')$ auf.

(c) Zeigen Sie explizit, dass mit dieser Transformation $\mathcal{H}' = 0$ wird.

33. Poisson-Klammer **(7 Punkte)**

$\underline{L} = (L_1, L_2, L_3)$ sei der dreidimensionale Drehimpulsvektor. (q_1, q_2, q_3) ist der kartesische Ortsvektor und (p_1, p_2, p_3) der kanonisch konjugierte Impulsvektor. A, B seien beliebige skalare Funktionen der q_α und p_α. Zeigen Sie folgende Beziehungen für die Poissonklammern:

(a) $\{q_\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$

(b) $\{q_\alpha, q_\beta\} = \{p_\alpha, p_\beta\} = 0$

(c) $\{q_1, L_2\} = q_3$

(d) $\{p_1, L_2\} = p_3$

(e) $\{A, B\} = -\{B, A\}$

(f) $\{A, q_\alpha\} = -\partial_{p_\alpha} A$

(g) $\{A, p_\alpha\} = \partial_{q_\alpha} A$