INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M. Sc. Niklas Casper
M. Sc. Boris Celan

Physikalische Rechenmethoden I WiSe 2016/17

12. Übungsblatt Abgabe: Do, 02.02.2017 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1617/rm1617`.

37. **Diracsche Deltafunktion (8 Punkte)**

(a) Zeigen Sie ausgehend von der definierenden Eigenschaft der δ-Funktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\ dx = f(0)$$

und der Heaviside-Funktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\theta(x)\ dx = \int_{0}^{\infty} f(x)\ dx$$

folgende Eigenschaften.

i.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\ dx = f(a)$$

ii.
$$\delta(-x) = \delta(x) \text{ und } \delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x) \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

iii.
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(f(x)) = \sum_i g(x_i)\frac{1}{|f'(x_i)|} \quad \text{wobei die Summe über die Nullstellen } x_i \text{ von } f \text{ geht.}$$

iv.
$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)$$

(b) Eine alternative Definitionen der δ-Distribution verwendet Dirac-Folgen. Eine Folge von Funktionen $\phi_k(x)$ von integrierbaren Funktionen heißt Dirac-Folge wenn

$$\phi_k \geq 0 \qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(x)\ dx = 1$$

und für alle $\epsilon > 0$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]} \phi_k(x)\ dx \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty.$$

Bitte wenden! →

i. Zeigen Sie, dass die δ-Distribution durch

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi_k(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x)\ dx$$

definiert werden kann.

ii. Konstruieren Sie zwei Dirac-Folgen und überprüfen Sie ihre Eigenschaften.

38. **Separation der Variablen (4 Punkte)**
Lösen Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen mit gegebener Anfangsbedingung

(a)
$$xy'(x) - y^2(x) = 0 \qquad \text{mit } y(2) = 1$$

(b)
$$y'(x) - xy(x) = 0 \qquad \text{mit } y(0) = 1 \text{ und } y \neq 0$$

durch Separation der Variablen.

39. **Variation der Konstanten (3 Punkte)**
Lösen Sie die lineare Differentialgleichung

$$y'(x) - 2y(x) - 3e^{2x} = 0$$

durch Variation der Konstanten mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

40. **Homogene Differentialgleichung (5 Punkte)**
Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$xy'(x) - y(x) - x = 0.$$

(a) Bringen Sie die Gleichung auf die Form

$$y'(x) = f(y, x)$$

und zeigen Sie, dass $f(x, y)$ homogen vom Grad 0 ist.

(b) Benutzen Sie eine geeignete Transformation um die Gleichung zu lösen und geben Sie die allgemeine Lösung an.