



12. Übungsblatt

Abgabe: Di, 22.01.2019 bis 11:30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter <https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1819/thermo1819>.

46. **Wissensfragen (2 Punkte)**

Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und antworten Sie in vollständigen Sätzen.

- (a) n Störstellen seien auf $N+n$ Gitterplätzen im Kristall verteilt. Berechnen Sie die Entropie (niedrigste Näherung Stirling). Die Energie des Systems sei $E = n\epsilon$ mit der Energie ϵ einer Störstelle.

Berechnen Sie die Temperatur des Systems. Formen sie den erhaltenen Ausdruck so um, dass Sie eine Beziehung für die Anzahl der Störstellen in Abhängigkeit von der Temperatur erhalten.

47. **Das van-der-Waals-Gas und kritische Exponenten (6 Punkte)**

In der van-der-Waals-Theorie wird ein reales Gas durch die van-der-Waals'sche Zustandsgleichung beschrieben:

$$Nk_B T = \left(P + \frac{aN^2}{V^2} \right) (V - bN),$$

wobei a, b Konstanten sind, die man aus der Virialentwicklung gewinnt.¹

- (a) Bringen Sie die van-der-Waals'sche Zustandsgleichung in die reduzierte Form. Bestimmen Sie dafür die Werte am kritischen Punkt (P_c, V_c, T_c).
- (b) Nutzen Sie eine geeignete Taylorentwicklung um den kritischen Punkt des van-der-Waals-Gases herum und zeigen Sie, dass der Druck entlang der kritischen Isothermen ($T = T_c$) durch ein Potenzgesetz beschrieben werden kann:

$$P - P_c \propto (n - n_c)^\delta.$$

Bestimmen Sie auch den kritischen Exponenten δ .

- (c) Bestimmen Sie analog für die Kompressibilität κ_T die Temperaturabhängigkeit nahe der kritischen Temperatur T_c wobei $V = V_c$ gelten soll. Sie sollten folgendes Potenzgesetz erhalten:

$$\kappa_T \propto (T - T_c)^{-\gamma}.$$

Bitte wenden! →

¹ a ist als Kohäsionsdruck und b als Kovolumen bekannt

48. **Klassisches Gittergas (6 Punkte)**

N Teilchen bewegen sich in einem Volumen V , das in Zellen des Volumens b unterteilt wird. Die potentielle Energie sei ∞ , wenn sich zwei Teilchen in der selben Zelle befinden, 0 sonst.

- (a) Berechnen Sie die Zustandssumme. Für den Ortsanteil sollten Sie $Z = A(N, V, b) b^N$ erhalten, wobei $A(N, V, b)$ die (auszuwertende) Anzahl der möglichen Konfigurationen ist. Vereinfachen Sie die so erhaltende Zustandssumme mit Hilfe der Stirlingformel in niedrigster Näherung.
- (b) Berechnen Sie die Zustandsgleichung $P = P(N, V, T)$ dieses Gases.
- (c) Berechnen Sie außerdem den n -ten Virialkoeffizienten des Gases.

49. **Bose-Einstein-Kondensation (6 Punkte + 6 Bonuspunkte)**

Wir betrachten ein verdünntes Gas aus Bosonen in dem Wechselwirkungen zwischen den Bosonen in niedrigster Ordnung vernachlässigt werden können. Betrachten wir das System im großkanonischen Ensemble, ergibt sich die Besetzungszahl der einzelnen Zustände aus der Bose-Verteilung zu

$$\langle n(\mathbf{p}) \rangle = \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon(\mathbf{p}) - \mu)] - 1}, \quad (1)$$

dabei ist \mathbf{p} der Impuls eines Zustands, $\epsilon(\mathbf{p})$ die Energie eines Teilchens in diesem Zustand, $\beta = 1/(k_B T)$ die inverse Temperatur und μ das chemische Potential. Die Gesamtzahl der Teilchen im System lautet entsprechend

$$N = \sum_{\mathbf{p}} \langle n(\mathbf{p}) \rangle = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon(\mathbf{p}) - \mu)] - 1}. \quad (2)$$

- (a) Was ergibt sich für die Besetzungszahlen der einzelnen Zustände im Limes $T \rightarrow 0$? Was lässt sich über μ in diesem Fall sagen, wenn das System gerade N Teilchen enthalten soll?
- (b) Nehmen Sie an, dass es sich bei dem System um einen dreidimensionalen unendlichen Potentialtopf handelt. Überführen Sie die Summe in Glg. (2) in ein Integral und berechnen Sie so die Anzahl der Teilchen in **angeregten** Zuständen unter der Annahme, dass $\mu \rightarrow \epsilon_0$, wobei ϵ_0 die Grundzustandsenergie des Systems ist.
Hinweis: Erinnern Sie sich an die Zustandsdichte aus Aufgabe 9.
- (c) Berechnen Sie die kritische Temperatur T_c , unterhalb derer die Besetzungszahl des Grundzustandes $\langle n(\mathbf{0}) \rangle$ makroskopisch wird. Bestimmen Sie außerdem den kritischen Exponenten γ für die Besetzung des Grundzustandes. Es soll gelten:

$$\langle n(\mathbf{0}) \rangle = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^\gamma \right) \quad (3)$$

Bitte wenden! →

(d) **Bonus** Wiederholen Sie die Aufgabenteile b und c qualitativ für ein verdünntes Bosegas in folgenden Systemen:

- i. Zweidimensionaler unendlicher Potentialtopf
- ii. Zweidimensionales harmonisches Potential
- iii. Dreidimensionales harmonisches Potential

In welchen Fällen tritt Bose-Einstein-Kondensation auf? Wie lautet in diesen Fällen der kritische Exponent?

Hinweis: Für die Bestimmung der kritischen Temperatur T_c ist der Wert des folgenden Integrals nützlich:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^{a-1}}{e^x - 1} = \Gamma(a)\zeta(a) \quad (4)$$

Einige Werte der Riemannsches ζ -Funktion lauten: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(3) \approx 1.202$, $\zeta(3/2) \approx 2.61$. Die Werte der Γ -Funktion finden Sie in Aufgabe 9.