12. Übungsblatt — Abgabe: 24. Februar 2019 bis 9.45 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

35. Potential eines Vektorfeldes — 4 Punkte

Die Folgerungen aus dem stokesschen Integralsatz in der Vorlesung liefern eine Bedingung für die Existenz eines Potentials ϕ zu einem Vektorfeld $\underline{A}$: $\partial_{\underline{r}} \times \underline{A} = 0 \Rightarrow \underline{A} = \partial_{\underline{r}}\phi$. Wir betrachten nun die Vektorfelder

$$\underline{A}(x^1,x^2,x^3) = \begin{aligned} &\left(4(x^2)^2+3x^3\right)\underline{e}_1 \\ &+\left(8x^1x^2-8(x^3)^3\right)\underline{e}_2 \\ &+\left(-24x^2(x^3)^2+3x^1\right)\underline{e}_3 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \underline{B}(x^1,x^2,x^3) = \begin{aligned} &\left(x^1x^3+3x^1\right)\underline{e}_1 \\ &+\left(3x^2x^3\right)\underline{e}_2 \\ &+\left((x^2)^2+(x^3)^4\right)\underline{e}_3 \end{aligned} \quad .$$

Überprüfen Sie, welche dieser Vektorfelder ein Potential besitzen und ggf. bestimmen Sie dies.

Hinweis: Eine gängige Methode zur Bestimmung des Potentials ist zunächst die Stammfunktion einer Komponente bzgl. der entsprechenden den Koordinate zu berechnen, das heißt z.B. $\int A^1(x^1,x^2,x^3)dx^1$. Dadurch erhält man eine Stammfunktion mit einer Integrationskonstanten, die immer noch von x^2 und x^3 abängen kann. Um diese Konstante zu bestimmen, bildet man die partielle Ableitung bzgl. einer dieser beiden Koordinaten und vergleicht sie mit der entsprechenden Komponente des Vektorfeldes. Dies wird dann für die letzte Koordinate wiederholt um das Potential zu erhalten.

36. Integralsatz von Gauß — 8 Punkte

Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beliebig geformtes Volumen und (V) dessen Oberfläche. Gegeben sei zudem ein Vektorfeld $\underline{A}(x^1,x^2,x^3)$. Dann besagt der Integralsatz von Gauß:

$$\int_V \partial_{\underline{r}} \cdot \underline{A}\, dV = \oint_{(V)} \underline{A} \cdot d\underline{O} \quad .$$

(a) Rechnen Sie diese Formel nach für die geschlossene Oberfläche der Halbkugel $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 \leq R^2$ und $x^3 \geq 0$ und das Vektorfeld

$$\underline{A} = \; x^1x^2\underline{e}_1 + x^2x^3\underline{e}_2 - x^3\underline{e}_3 \quad .$$

(b) **Zusatzaufgabe** — **8 Zusatzpunkte**

Wiederholen Sie a) für einen Zylinder um die x^3-Achse mit Radius R und Höhe von $-d$ bis d und dem Vektorfeld

$$\begin{aligned} \underline{A} = \; &\left(x^1e^{-\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} - x^2\right)\underline{e}_1 \\ &+\left(x^2e^{-\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} - x^1\right)\underline{e}_2 \\ &+\sin\left(\frac{\pi x^3}{2d}\right)\underline{e}_3 \end{aligned}$$

Bitte wenden ⟶

37. **Integralsatz von Stokes** **8 Punkte**

Es sei $O \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beliebig geformte Oberfläche und (O) deren Randkurve. Gegeben sei zudem ein Vektorfeld $\underline{A}(x^1, x^2, x^3)$. Dann besagt der Integralsatz von Stokes:

$$\int_O \partial_{\underline{r}} \times \underline{A} \cdot d\underline{O} = \oint_{(O)} \underline{A} \cdot d\underline{r} \quad .$$

(a) Rechnen Sie diese Formel explizit nach für die Ellipse $(\frac{x^1}{3})^2 + (\frac{x^2}{2})^2 \leq 1$ und $x^3 = 0$ und das Vektorfeld

$$\underline{A} = \left(\frac{4}{3}x^1 - 2x^2\right) \underline{e}_1 + \left(3x^2 - x^1\right) \underline{e}_2 \quad .$$

(b) **Zusatzaufgabe** **8 Zusatzpunkte**

Wiederholen Sie a) für ein Dreieck mit den Ecken $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$ und dem Vektorfeld

$$\underline{A} = \left(x^2 - x^1\right) \underline{e}_1 - x^2 \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \quad .$$