INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. Björn Willenberg
M.Sc. Boris Celan

Rechenmethoden II — SoSe 2013

12. Übungsblatt — Abgabe: Di, 09.07.2013 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/sose13/rm213`.

Dieses Übungsblatt dient der Klausurvorbereitung und entspricht vom Umfang und Schwierigkeit der Klausur. Man kann in diesem Übungszettel 40 Punkte erreichen, wovon 20 Punkte Bonuspunkte sind (dies gilt nicht für die Klausur!).

34. **Wissensfragen**

(a) Geben Sie das Volumenelement $\mathrm{d}V$ in Zylinderkoordinaten an.

(b) Welche Beziehung besteht zwischen dem Gradienten und der Richtungsableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

(c) Wieviele Riemannsche Blätter hat der komplexe Logarithmus?

(d) Nennen Sie drei äquivalente Aussagen zu "f ist eine holomorphe Funktion".

(e) Geben Sie die Fouriertransformation von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)$ unter der Nebenbedingung, dass $f(t)$ im Unendlichen verschwindet, an.

35. **Vektoranalysis und Integralsätze**
Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

(a) Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} (\lambda - 1)(3x^2 y + y^3) \\ x^3 + 3xy^2 \\ 2z + (\lambda - 2)xy \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das $\lambda \in \mathbb{R}$, für welches $\vec{A}$ ein skalares Potential $\Phi(x, y, z)$ besitzt. Berechnen Sie für das bestimmte λ das skalare Potential $\Phi(x, y, z)$.

(b) Gegeben sei die Menge $\mathcal{M} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\right\}$ sowie das Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ z \\ x \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie den Satz von Gauß für die Menge $\mathcal{M}$ und das gegebene Vektorfeld $\vec{F}$. Überlegen Sie sich dazu eine geeignete Parametrisierung für $\mathcal{M}$ und $\partial\mathcal{M}$.

Bitte wenden! →

36. **Funktionentheorie**
Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = 3z + 2z^{-1} - 3(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z).$$

Prüfen Sie nach ob $f(z)$ komplex differenzierbar ist. Wenn ja, geben Sie die Ableitung an.

(b) Wir betrachten für $k > 0, k \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x^2+1)^2(x^2+4)} \mathrm{d}x.$$

i. Führen Sie das reelle Integral in ein geschlossenes Kurvenintegral in der komplexen Ebene über. Skizzieren Sie den Weg des Kurvenintegrals in der komplexen Ebene.

ii. Berechnen Sie mithilfe des Residuensatzes das reelle Integral.

37. **Orthonormale Funktionensysteme und Fourierreihenentwicklung**
Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

(a) Betrachten Sie den Raum der Funktionen im Intervall $[-1, 1]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f | g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

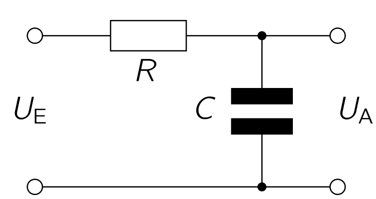
Orthonormalisieren Sie mithilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren die Funktionen:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = \sin(\pi x).$$

(b) Bestimmen Sie die Fourierreihenentwicklung der 2π-periodisch fortgesetzten Funktion

$$f(x) = x^3 \text{ für } -1 < x < 1.$$

38. **Laplace-Transformation und Elektrische Schaltkreise**
Wir betrachten folgenden elektrischen Schaltkreis



(a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung der Ausgangsspannung $U_A(t)$ für eine angelegte Eingangsspannung $U_E(t)$ ohne Belastung von $U_A(t)$.

(b) Lösen Sie die DGL für den Fall, dass die Eingangsspannung $U_E(t)$ zur Zeit $t = 0$ sprunghaft eingeschaltet wird und dann für $t > 0$ exponentiell abfällt:

$$U_E(t) = U_0 e^{-\alpha t}, \; \alpha > 0, \; \alpha \neq \frac{1}{RC}.$$

Verwenden Sie dazu die Laplace-Transformation $\mathcal{L}$, d.h. wenden Sie die Laplace-Transformation auf die DGL an, lösen Sie die erhaltene Gleichung nach $\tilde{U}_A(z) = \mathcal{L}(U_A(t))$ auf und bestimmen Sie die Lösung durch Laplace-Rücktransformation $\mathcal{L}^{-1}(\tilde{U}_A(z))$.