Technische Universität Braunschweig

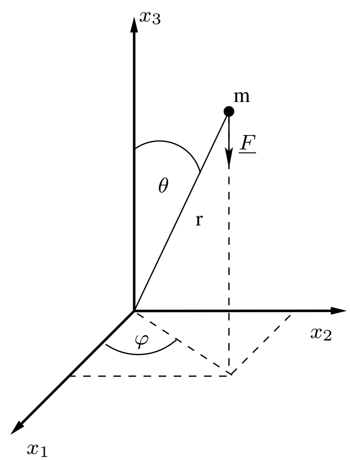
Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. M. Feyerabend

12. Übungsblatt — Abgabe: 22. Juni 2016 bis 9.40 Uhr im Kasten vor 3.317

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

25. **Sphärisches Fadenpendel**

Ein Massenpunkt der Masse m ist durch eine masselose Stange (starrer Faden) der Länge l mit dem Ursprung des Koordinatensystems verbunden. Die Aufhängung erlaubt Ausschläge dieses sphärischen Pendels (Kugelpendel) in unterschiedliche Richtungen. Auf den Massenpunkt wirkt die Schwerkraft $\underline{F} = -\, m\, g\, \underline{e}_3$. Die Situation ist in der Skizze veranschaulicht. Hilfreich ist die Verwendung von Kugelkoordinaten:



$$x_1 = r\,\sin\,\theta\,\cos\,\varphi$$
$$x_2 = r\,\sin\,\theta\,\sin\,\varphi$$
$$x_3 = r\,\cos\,\theta$$

Die normierten Basisvektoren in Kugelkoordinaten berechnen sich aus denen in Kartesischen Koordinaten bekanntlich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\underline{e}_r &= \sin\,\theta\,\cos\,\varphi\;\underline{e}_1 + \sin\,\theta\,\sin\,\varphi\;\underline{e}_2 + \cos\,\theta\;\underline{e}_3\\
\underline{e}_\theta &= \cos\,\theta\,\cos\,\varphi\;\underline{e}_1 + \cos\,\theta\,\sin\,\varphi\;\underline{e}_2 - \sin\,\theta\;\underline{e}_3\\
\underline{e}_\varphi &= -\sin\,\varphi\;\underline{e}_1 + \cos\,\varphi\;\underline{e}_2
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich für den Massenpunkt die Geschwindigkeit zu

$$\underline{\dot{x}} = \dot{r}\;\underline{e}_r + r\dot{\theta}\;\underline{e}_\theta + r\dot{\varphi}\,\sin\,\theta\;\underline{e}_\varphi$$

und die Beschleunigung zu

$$\begin{aligned}
\underline{\ddot{x}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\;\underline{e}_r\\
&\quad+\;(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\,\theta\,\sin\,\theta)\;\underline{e}_\theta\\
&\quad+(r\ddot{\varphi}\,\sin\,\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\,\sin\,\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\cos\,\theta)\;\underline{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Der Gradient in Kugelkoordinaten wirkt auf eine Funktion $f(r,\vartheta,\varphi)$ wie folgt:

$$\partial_{\underline{x}} f = \left(\underline{e}_r\partial_r + \underline{e}_\vartheta\frac{1}{r}\partial_\vartheta + \underline{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\right) f$$

Bitte wenden→

1. Stellen Sie die Schwerkraft $\underline{F}$, das entsprechende Potential V und die kinetische Energie in den Kugelkoordinaten (r, θ, φ) dar. **2 Punkte**
2. Stellen Sie die Nebenbedingung in integraler Form und in differentieller Form (d.h. mit virtuellen Verrückungen) je in Kugelkoordinaten dar. **2 Punkte**
3. i. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für den Massenpunkt in Kugelkoordinaten unmittelbar aus dem d'Alembert-Prinzip ab (ohne L I oder L II !).

   ii. Bestimmen Sie die auf den Massenpunkt wirkende Zwangskraft. **4 Punkte**
4. i. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für den Massenpunkt in Kugelkoordinaten über die Lagrange-Gleichungen 1.Art (L I) auf.

   ii. Geben Sie die auf den Massenpunkt wirkende Zwangskraft an nur unter Verwendung der Ergebnisse aus 4.i . **4 Punkte**
5. i. Wählen Sie θ und φ als generalisierte Koordinaten, geben Sie die Lagrange-Funktion in diesen Koordinaten an und bestimmen Sie für diese die Bewegungsgleichungen über die Lagrange-Gleichungen 2.Art (L II).

   ii. Geben Sie die auf den Massenpunkt wirkende Zwangskraft an nur unter Verwendung der Ergebnisse aus 5.i . **3 Punkte**
6. Geben Sie die zyklische Koordinate und den damit verbundenen Erhaltungssatz an. Interpretieren Sie den Erhaltungssatz. **2 Punkte**
7. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für die generalisierten Koordinaten für den Spezialfall $\dot{\varphi} = \Omega_0 = const \neq 0$. Diskutieren Sie die Lösungen. **2 Punkte**
8. Betrachten Sie als weiteren Spezialfall $\dot{\varphi} = 0$. Was erkennen Sie wieder? Beschreiben Sie die Situation für die sich eine Näherungslösung anbietet. **1 Punkt**

Hinweis: Gehen Sie nach der jeweiligen Lösungsstrategie vor kommentieren Sie die Schritte.