Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. M. Feyerabend

Thermodynamik und Quantenstatistik WS 2017/18

11. Übungsblatt Abgabe: 18. Januar bis 9:45 Uhr im Kasten vor 3.317

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

29. **Relativistisches Fermigas** **(5 Punkte)**

In einigen weißen Zwergen haben die meisten Elektronen relativistische kinetische Energien $\epsilon = pc$, wobei p der Impuls des Elektrons sei. Die Impulsquantelung im Volumen V ist die gleiche wie im nicht relativistischen Grenzfall, also übernehmen wir aus dem Skript S.84 unten

$$\underline{p}_l^2 = \hbar^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (l_x^2 + l_y^2 + l_z^2) \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Fermienergie im relativistischen Fall durch

$$\epsilon_F = \hbar \pi c \left(\frac{3n}{\pi}\right)^{1/3}$$

gegeben ist ($n = N/V$). Berücksichtigen Sie hierbei auch den Spin.

(b) Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie im Grundzustand

$$U_0 = \tfrac{3}{4} N \epsilon_F$$

ist. Leiten Sie dazu zunächst die relativistische Zustandsdichte $D(\epsilon)$ nach der gleichen Methode ab, die für den nicht relativistischen Fall angewendet wurde. Danach ist U_0 leicht aufschreibbar.

(c) Gehen Sie von den Ergebnissen aus der Vorlesung aus und zeigen Sie, dass im relativistischen Fall für den Druck gilt

$$p \propto n^{4/3} \quad .$$

<u>*Zusatz*</u> ***(5 Zusatzpunkte)***

Vergleichen Sie mit dem nicht relativistischen Fall und erläutern Sie die Konsequenzen für die Entwicklung von Sternen.

30. **Bose-Einstein-Kondensation** **(7 Punkte)**

Es soll die Kondensation eines Bosegases in den Grundzustand bei tiefen Temperaturen etwas genauer untersucht werden.

(a) Analog zur Vorlesung werden die Besetzungszahl N_0 für den Grundzustand und die Restteilchenzahl N_e getrennt behandelt. Leiten Sie zunächst die Beziehungen $N_0 = (1-\eta)N$ und $N_e = \eta N$ her, wobei

$$\eta = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)} \qquad \text{und} \qquad g_{3/2}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^2}{z^{-1}e^{x^2} - 1} dx, \quad z = e^{\mu/\tau}$$

gilt. Bestimmen Sie die kritische Temperatur T_c als Funktion der Dichte N/V.

(b) Zeigen Sie, dass

$$z = \frac{N(1-\eta)}{N(1-\eta)+1}$$

gilt und bestimmen Sie daraus Näherungsausdrücke für $N_0(T)$ im Falle sehr großer Teilchenzahlen N. Skizzieren Sie den Verlauf von $N_0(T)$.

Hinweis: $g_{3/2}(z)$ wächst im Intervall $[0;1]$ monoton von Null auf den Wert 2,612.

Bitte wenden ⟶

31. **2D Bosegas** **(8 Punkte)**

Es soll die Kondensation eines zweidimensionalen Bosegases in den Grundzustand bei tiefen Temperaturen untersucht werden.

(a) Berechnen Sie die Teilchenzahl N als Funktion von τ, μ und V.

(b) Bestimmen Sie die kritische Temperatur τ_c. Tritt für das zweidimensionale Bosegas eine Bose-Einstein-Kondensation auf?

(c) Wiederholen Sie die Rechnungen aus (a) und (b) für masselose Bosonen mit

$$\epsilon = cp \quad .$$

Hinweis: Die Zetafunktion $\zeta(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1}$ hat für $\alpha \geq 1$ die äquivalente Darstellung $\zeta(\alpha) = \sum_{r=1}^\infty \frac{1}{r^\alpha}$.