INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M. Sc. Niklas Casper
M. Sc. Boris Celan

Physikalische Rechenmethoden I WiSe 2016/17

11. Übungsblatt Abgabe: Do, 26.01.2017 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1617/rm1617`.

34. **Fourier-Entwicklung (4 Punkte)**
Sei die periodisch fortgesetzte Sägezahnfunktion

$$f(x) = \frac{x}{2L}, \quad x \in [0, 2L]$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie diese Funktion.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Entwicklung dazu.

35. **Legendre Polynome (6 Punkte)**
Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome $P_n(x)$ ein orthogonales System auf dem Intervall $[-1, 1]$ bilden, d. h. es gilt

$$\langle P_n | P_m \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) \, dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}.$$

Verwenden Sie zur Lösung partielle Integration und die Darstellung der Legendre-Polynome durch die Rodrigues-Formel

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Außerdem darf die Lösung des Integrals

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n \, dx = (-1)^n \frac{2^{2n+1} n!^2}{(2n+1)!}$$

verwendet werden.

36. **Faltungstheorem (10 Punkte)**

(a) Das Faltungstheorem lautet:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x-y) g_2(y) \mathrm{d}y \Leftrightarrow \tilde{f}(k) = \tilde{g}_1(k) \tilde{g}_2(k)$$

Beweisen Sie das Faltungstheorem.

Hinweis: Zeigen Sie, dass das Faltungstheorem durch geschicktes Einschieben von $e^{ik(y-x)}$ und einem geeigneten Variablenwechsel $u = y - x$ und $v = x$ gilt.

Bitte wenden! →

(b) Es seien zwei Funktionen definiert durch:

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{für } -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad g_2(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 1 - x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

i. Berechnen Sie die Faltung

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x - y) g_2(y) \mathrm{d}y.$$

ii. Berechnen Sie die Fouriertransformation von g_1 und g_2.

iii. Bestimmen Sie die Fouriertransformation der Faltung mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabenteil ii.