Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan

Quantentheorie WS 2014/15

11. Übungsblatt Abgabe: Di, 20.01.2015 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1415/quanten`.

27. **Kopplung zweier Drehimpulse $\vec{J}_1$, $\vec{J}_2$ und Clebsch-Gordan Koeffizienten (11 Punkte)**
Wir betrachten zwei gekoppelte Drehimpulse $\vec{J}_1, \vec{J}_2$ mit $j_1 = 3/2, j_2 = 1/2$. Drücken Sie die normierten Zustände $|\,3/2, 1/2, j = 2, m = 2\,\rangle$, $|\,3/2, 1/2, j = 2, m = 1\,\rangle$ und $|\,3/2, 1/2, j = 1, m = 1\,\rangle$ durch die Zustände $|\,3/2, 1/2, m_1, m_2\,\rangle$ aus.
D.h. berechnen Sie folgende Clebsch-Gordan Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
&\langle\, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = \frac{1}{2} \,|\, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, j = 2, m = 2\,\rangle\,, \\
&\langle\, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2} \,|\, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, j = 2, m = 1\,\rangle\,, \\
&\langle\, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = -\frac{1}{2} \,|\, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, j = 2, m = 1\,\rangle\,, \\
&\langle\, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2} \,|\, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, j = 1, m = 1\,\rangle\,, \\
&\langle\, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = -\frac{1}{2} \,|\, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, j = 1, m = 1\,\rangle\,.
\end{aligned}$$

Hinweis: Gehen Sie dazu wie folgt vor:

i. $|\,3/2, 1/2, j = 2, m = 2\,\rangle = |\,3/2, 1/2, m_1 = 3/2, m_2 = 1/2\,\rangle$ (warum?).

ii. Die Zustände $|\,3/2, 1/2, j = 2, m\,\rangle$ können durch Anwendung von J^- konstruiert werden, wobei
$$J^-\,|\,j, m\,\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,|\,j, m-1\,\rangle\,.$$

iii. Der Zustand $|\,3/2, 1/2, j = 1, m = 1\,\rangle$ wird so gewählt, dass er orthonormal zu $|\,3/2, 1/2, j = 2, m = 1\,\rangle$ ist.

28. **LS-Kopplung eines Proton-Neutron-Systems (9 Punkte)**
In einem Proton-Neutron-System treten zwei Spins ($\vec{S}_1$ und $\vec{S}_2$) sowie ein relativer Bahndrehimpuls $\vec{\mathcal{L}}$ auf. Die Spins von Proton und Neutron sind jeweils $s_1 = s_2 = 1/2$. Der Gesamtdrehimpuls sei
$$\vec{J} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{\mathcal{L}}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{S}^2 = \left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right)^2$ und $\vec{J}^2$ kommutieren.

(b) Bestimmen Sie, welche j als Eigenwerte $j(j+1)$ von $\vec{J}^2$ auftreten, wenn der Eigenwert von $\vec{\mathcal{L}}^2$ durch $\ell(\ell+1)$ gegeben ist (d.h. fester Bahndrehimpuls ℓ). Wie oft treten in diesem Fall die erlaubten Werte von j auf?
Hinweis: Im vorliegenden Fall ist es vorteilhaft, zuerst die beiden Spins zu einem Gesamtspin $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ zu koppeln, und erst dann diesen mit $\vec{\mathcal{L}}$ zum Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$.

Bitte wenden! →

(c) Wir nehmen nun an, dass das Proton-Neutron-System durch den folgenden Hamilton-Operator beschrieben wird

$$H = A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + B\vec{\mathcal{L}} \cdot \left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right) .$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von H.
Hinweis: Drücken Sie $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ durch $\vec{S}^2$ und dann $\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{S}$ durch $\vec{J}^2$ aus. Es gibt 4 verschiedene Eigenwerte - wodruch sind diese charakterisiert?