Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan
Dipl.-Phys. Björn Willenberg

Thermodynamik und Quantenstatistik WiSe 2013/14

11. Übungsblatt Abgabe: Di, 14.01.2014 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1314/thermo1314`.

29. **Der quantenmechanische Virialsatz (5 Punkte)**
Beweisen Sie den Virialsatz in einer Dimension

$$\mathrm{Sp}\left[\left(\frac{p^2}{m} - x\,\frac{\partial W(x)}{\partial x}\right)\rho\right] = 0$$

für ein Teilchen im Potential $W(x)$. Nehmen Sie hierzu an, dass der Dichteoperator des Systems ρ stationär ist, d. h. $[H, \rho] = 0$. Gehen Sie dann von $\mathrm{Sp}(p\,x\,[H, \rho]) = 0$ aus.

30. **Virialsatz für klassische Teilchen – Zeitmittelung (2 Punkte)**
Der Virialsatz lässt sich auch direkt aus der klassischen Mechanik durch eine Zeitmittelung entlang der Bahn im Phasenraum ableiten.[1] Gehen Sie dazu von der Größe $G = \sum_i \vec{p}_i\,\vec{r}_i$ aus (der Index i nummeriert die Teilchen). Berechnen Sie die totale Zeitableitung von G. Zeigen Sie zunächst, dass für das Zeitmittel dieser Ableitung $\left\langle \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} \right\rangle$ gilt:

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \frac{1}{t}\left(G(t) - G(0)\right).$$

Lassen Sie nun den Zeitraum, über den Sie mitteln, gegen unendlich gehen: Sie sollten den Virialsatz erhalten.

31. **Anwendung des Virialsatzes (5 Punkte)**
Man bestimme das Verhältnis von mittlerer potentieller und mittlerer kinetischer Energie beim harmonischen Oszillator und bei Teilchen mit Coulombwechselwirkung.

Bitte wenden! →

[1] Man kann das als ein Beispiel für die Gleichheit von Zeit- und Ensemblemittel auffassen. Hier wird tatsächlich das System während eines langen Zeitraums anstatt eines Ensembles zu einem kurzen Zeitintervall betrachtet.

32. **Klassisches Gas mit Wechselwirkung (8 Punkte)**
Man betrachte ein klassisches Gas von N Punktteilchen mit Wechselwirkung

$$\Phi(r_{i,j}) = \frac{A}{r_{i,j}^n}, \qquad A > 0 \text{ und } n > 0$$

zwischen den Teilchen im Volumen V bei Temperatur T, Energie E und Druck P.

(a) Setzen Sie die quasiklassische Zustandssumme $Z(T,V)$ an. Führen Sie die Ihnen bereits bekannte Impulsintegration aus.

(b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$Z(\alpha T, V) = f(\alpha)\, Z(T, g(\alpha)V)), \qquad \alpha > 0.$$

Mit $f(\alpha) = \alpha^{3N(1/2-1/n)}$ und $g(\alpha) = \alpha^{3/n}$.
Hinweis: $\Phi(\eta r) = \eta^{-n}\,\Phi(r)$

(c) Zeigen Sie mit Aufgabenteil (b), dass die Freie Energie $F(T,V)$ eine Funktion von α und $F(u(\alpha)T, v(\alpha)V)$ ist. Zeigen Sie dann durch geeignete Differentiation, dass

$$E = aPV + bNkT.$$

Wie lauten die Konstanten a und b?