INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

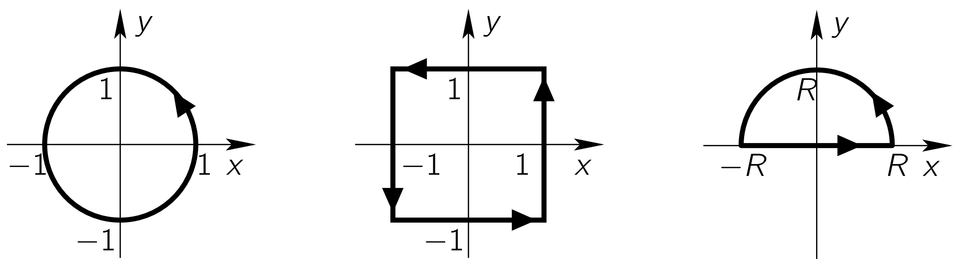
Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. Björn Willenberg
M.Sc. Boris Celan

Rechenmethoden II SoSe 2013

ZL10. Übungsblatt Abgabe: Zusatzblatt, keine Abgabe

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/sose13/rm213`.

1. **Kurvenintegrale im Reellen**



i. Integrale für den Rand des Einheitskreises inkl. Parametrisierung:

$$
\begin{aligned}
\vec{\gamma}(t) &= (\cos t, \sin t);\ \ t \in [0, 2\pi] \\
\int f_1(x,y)\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi \\
\int \vec{F}_2(x,y)\cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\sin t \cos t + \sin t \cos t\right) \mathrm{d}t = 0 \\
\int \vec{F}_3(x,y)\cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) \mathrm{d}t = -2\pi
\end{aligned}
$$

Bitte wenden! →

ii. Für den Rand des Quadrates muss man das Integral in vier Teile aufspalten und einzeln betrachten ($t \in [0, 2]$ für alle γ_n):

$$\vec{\gamma}_1(t) = (1, t-1) \qquad \vec{\gamma}_2(t) = (1-t, 1)$$
$$\vec{\gamma}_3(t) = (-1, 1-t) \qquad \vec{\gamma}_4(t) = (t-1, -1)$$
$$\int f_1(x, y)\mathrm{d}s = \cdots = \frac{32}{3}$$
$$\int \vec{F}_2(x, y) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \cdots = 0$$
$$\int \vec{F}_3(x, y) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \cdots = -8$$

iii. Für den Rand des Halbkreises muss man das Integral in zwei Teile aufspalten. In den oberen Halbbogen und in das Integral entlang der x-Achse.

$$\vec{\gamma}_1 = (t, 0);\; t \in [-R, R]$$
$$\vec{\gamma}_2 = (R\cos t, R\sin t);\; t \in [0, \pi]$$
$$\int f_1(x, y)\mathrm{d}s = \cdots = \left(\frac{2}{3} + \pi\right) R^3$$
$$\int \vec{F}_2(x, y) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \cdots = 0$$
$$\int \vec{F}_3(x, y) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \cdots = -\pi R^2$$

2. **Konservative Kraftfelder und skalare Potentiale**

(a) Ein Kraftfeld $\vec{F}$ ist konservativ wenn folgende äquivalente Aussagen erfüllt werden:

- Das Kurvenintegral über das Kraftfeld von einem Anfangspunkt zu einem Endpunkt wegunabhängig ist
- Das Kurvenintegral über jeden geschlossenen Weg verschwindet, d.h.:

$$\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

- $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$
- Es existiert eine skalare Funktion Φ mit der Eigenschaft $\vec{F} = -\operatorname{grad} \Phi$

Das 3.te Kriterium ist i.d.R. am einfachsten nachzurechnen.

(b) Wir überprüfen ob die Rotation der Kraftfelder $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$ verschwindet:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{F}_2 &= \nabla \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \partial_x y - \partial_y x = 0 \\
\operatorname{rot} \vec{F}_3 &= \nabla \times \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \\
&= \partial_x(-x) - \partial_y y = -2
\end{aligned}$$

Somit ist $\vec{F}_2$ konservativ.

(c) Wir suchen eine Funktion $\Phi(\vec{r})$ mit der Eigenschaft $\vec{F}_2(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,\Phi(\vec{r})$.

$$\Phi(\vec{r}) = -\int \left(\vec{F}_2(\vec{r})\right)_x \mathrm{d}x = -\int x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2 + c_1 + c_2(y)$$
$$\Phi(\vec{r}) = -\int \left(\vec{F}_2(\vec{r})\right)_y \mathrm{d}y = -\int y\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}y^2 + c_1 + c_3(x)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man:

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c_1,$$

wobei c_1 eine Integrationskonstante ist.

(d) Die Berechnung der Arbeit W erfolgt genauso wie in Aufgabe (1) angegeben:

$$W = \int_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \vec{F}\left(\vec{\gamma}(t)\right) \middle| \dot{\vec{\gamma}}(t) \right\rangle \mathrm{d}t,$$

Der Vorteil von konservativen Kraftfeldern ist, dass sie eine Stammfunktion haben - das skalare Potential Φ:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\left(\Phi(B) - \Phi(A)\right)$$

3. **Kurvenintegrale im Komplexen**

(a) i. Parametrisierung des Kreisrandes sowie die dazugehörigen Integrale:

$$z = e^{i\phi};\ \phi \in [0, 2\pi];$$
$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\phi}} i e^{i\phi} \mathrm{d}\phi = 2\pi i$$
$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{z^n}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{in\phi}} i e^{i\phi} \mathrm{d}\phi = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \neq 1 \\ 2\pi i & \text{wenn } n = 1 \end{cases}$$

ii. Parametriesierung des Randes des Quadrates sowie das dazugehörige Integral ($t \in [0, 2]$):

$$z_1 = 1 + i(t+1) \qquad \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = i$$
$$z_2 = (1-t) + i \qquad \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} = -1$$
$$z_3 = -1 + i(1-t) \qquad \frac{\mathrm{d}z_3}{\mathrm{d}t} = -i$$
$$z_4 = (t-1) - i \qquad \frac{\mathrm{d}z_4}{\mathrm{d}t} = 1$$
$$\int_{\Gamma_2} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \cdots = 2\pi i$$

Bitte wenden! →

iii. Parametrisierung des Randes des Halbkreises sowie das dazugehörige Integral:

$$\begin{aligned}
z_1 &= t;\ t \in [-R, R] \\
z_2 &= Re^{i\phi};\ \phi \in [0, \pi] \\
\int_{\Gamma_3} z^2 \mathrm{d}z &= \int_{-R}^{R} t^2 \mathrm{d}t + \int_0^{\pi} R^2 e^{i2\phi} i R e^{i\phi} \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{2}{3}R^3 + iR^3 \int_0^{\pi} e^{i3\phi} \mathrm{d}\phi = \frac{2}{3}R^3 + iR^3 \frac{1}{3i}\left[e^{i3\pi} - 1\right] \\
&= \frac{2}{3}R^3 - \frac{2}{3}R^3 = 0
\end{aligned}$$

(b) Die Ergebnisse müssen identisch sein zu denen aus Aufgabenteil (a).