INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

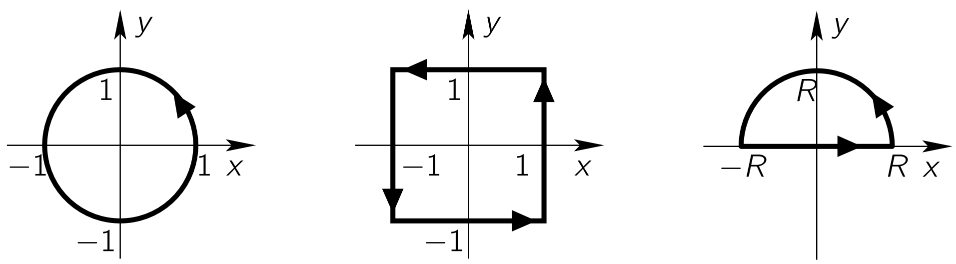
Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. Björn Willenberg
M.Sc. Boris Celan

Rechenmethoden II | SoSe 2013

Z10. Übungsblatt | Abgabe: Zusatzblatt, keine Abgabe

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/sose13/rm213`.

1. **Kurvenintegrale im Reellen**
   Es sollen relle Kurvenintegrale für skalare Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sowie für vektorwertige Funktionen $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ entlang drei unterschiedlicher Wege Γ berechnet werden.



Integrieren Sie dafür die folgenden Funktionen entlang der drei angegebenen Wege:

(a) $f_1(\vec{r}) = x^2 + y^2$

(b) $\vec{F}_2(\vec{r}) = (x, y)$

(c) $\vec{F}_3(\vec{r}) = (y, -x)$

Gehen Sie dabei für jeden der drei Wege wie folgt vor:

- Überlegen Sie sich eine Parametrisierung $\vec{\gamma}(t) = (\gamma_x(t), \gamma_y(t))$ und die dazugehörigen Intervallgrenzen $t_0 \leq t \leq t_1$.
- Führen Sie das Kurvenintegral für die Funktionen aus (a)–(c) aus.
  Das Kurvenintegral für eine skalare Funktion $f(\vec{r})$ entlang eines Weges Γ ist gegeben durch:
  $$\int_\Gamma f \,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} f\left(\vec{\gamma}(t)\right) \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\gamma_x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\gamma_y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$
  Das Linienintegral für eine vektorwertige Funktion $\vec{F}(x, y)$ entlang eines Weges $\vec{\gamma}(t)$ ist gegeben durch
  $$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \vec{F}\left(\vec{\gamma}(t)\right) \middle| \dot{\vec{\gamma}}(t) \right\rangle \mathrm{d}t,$$
  wobei $\left\langle \vec{a} \middle| \vec{b} \right\rangle$ das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Bitte wenden! →

2. **Konservative Kraftfelder und skalare Potentiale**
Sie kennen aus der theoretischen Mechanik den Begriff der konservativen Kraftfelder/Vektorfelder.

(a) Wann ist ein Kraftfeld konservativ? Nennen Sie alle Bedingungen und überlegen Sie sich, welche Bedingung i.d.R. am einfachsten anzuwenden ist.

(b) Sind die Kraftfelder $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$ aus Aufgabe (1) konservativ?

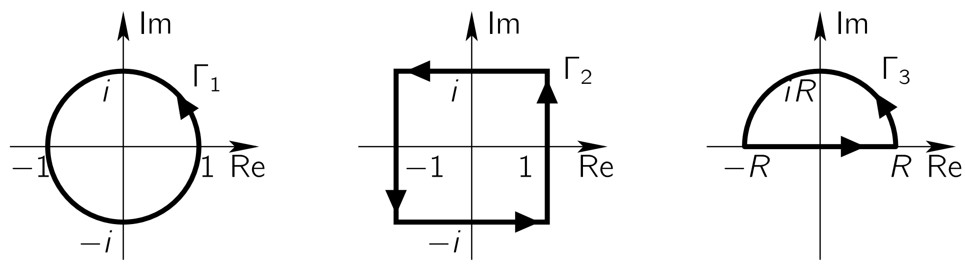
(c) Bestimmen Sie zu den konservativen Kraftfeldern aus Aufgabenteil (b) das skalare Potential Φ, für welches gilt

$$\vec{F} = -\operatorname{grad}\Phi.$$

(d) Wie berechnet man die Arbeit entlang eines Weges, die in einem Kraftfeld $\vec{F}$ verrichtet wird? Wo liegt der Vorteil bei der Berechnung der Arbeit bei einem konservativen Kraftfeld gegenüber einem nicht konservativen Kraftfeld?

3. **Kurvenintegrale im Komplexen**

(a) Wir betrachten wieder die gleichen Wege wie in Aufgabe (1), diesmal jedoch in der komplexen Ebene:



Integrieren Sie die folgenden Funktionen entlang der angegebenen Wege:

i. $f_4(z) = \frac{1}{z}$ für die Wege Γ_1 und Γ_2,
ii. $f_5(z) = \frac{1}{z^n}$ für den Weg Γ_1, wobei $n \in \mathbb{Z}$,
iii. $f_6(z) = z^2$ für den Weg Γ_3.

Überlegen Sie sich zunächst wieder eine Parametrisierung der Wege $z = z(t)$ mit $t_0 \leq t \leq t_1$ und führen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

aus.

(b) Berechnen Sie die Integrale aus Aufgabenteil (a) unter Anwendung des Residuensatzes.