INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
P. Meier, M. Sc.

THEORETISCHE MECHANIK SS 2015

10. Übungsblatt Abgabe: 26. Juni 2015 bis 14 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: P. Meier, Raum A223, Tel.: 391-5189, patrick.meier@tu-bs.de

24. **Zweikörperproblem** **(7 Punkte)**

In der Vorlesung wurde der Übergang vom Zweikörperproblem mit gravitativer Wechselwirkung zum Einkörperproblem mit Relativkoordinate, reduzierter Masse usw. behandelt. Dies soll nun kurz wiederholt werden.

(a) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie zweier Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 in die Energie des Schwerpunktes und die kinetische Energie der Relativbewegung aufspaltet.

Die große Halbachse der Ellipse von m_2 im System, in dem m_1 ruht, sei a, die Exzentrizität ε. Im Schwerpunktsystem vollführen beide Massen jeweils eigene Ellipsen mit den großen Halbachsen a_1, a_2 und den Exzentrizitäten ε_1, ε_2.

(b) Skizzieren Sie die Bahnen der Körper in beiden Bezugssystemen.

(c) Zeigen Sie, dass $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ gilt.

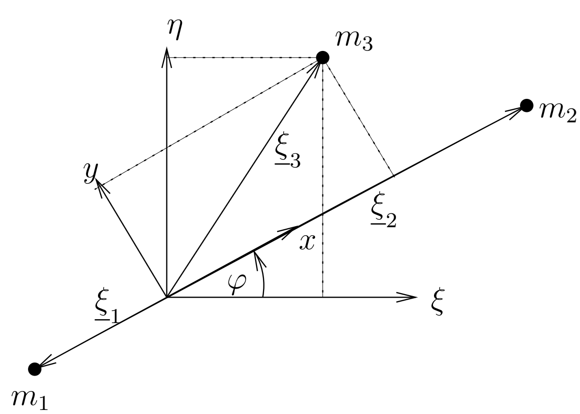
(d) Zeigen Sie weiterhin, dass

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a$$

ist.

25. **Hill-Radius** **(10 Punkte)**

In dieser Aufgabe soll eine Anwendung des eingeschränkten Drei-Körper-Problems, der Hill-Radius, für die drei Massen m_1, m_2 und m_3 näher untersucht werden. Entsprechend der Vorlesung wird $m_3 \ll m_1$, m_2 angenommen. Wenn zudem noch gilt $m_2 \ll m_1$, dann beschreibt der Hill-Radius eine Kugel um m_2, in der die Gravitation von m_2 die Bewegung von m_3 dominiert. Wenn m_3 diesen Bereich verlässt, wird es auch maßgeblich von m_1 beeinflusst und sein Bahn wird deutlich komplizierter. Ein Beispiel für solch ein System sind Saturn (m_1), sein Mond Enceladus (m_2) und ein Staubteilchen (m_3) nahe des Mondes. Wir gehen hier von dem mitrotierenden Schwerpunktsystem (siehe Skizze) aus der Vorlesung aus und beschränken uns auf die Orbitalebene von m_1 und m_2.



Bitte wenden ⟶

Die exakten Bewegungsgleichungen für m_3 sind dort:

$$
\begin{aligned}
x'' - 2ny' - n^2 x &= -\frac{\mu_1(x + c\mu_2)}{\sqrt{(x+c\mu_2)^2 + y^2 + z^2}^3} - \frac{\mu_2(x - c\mu_1)}{\sqrt{(x-c\mu_1)^2 + y^2 + z^2}^3} \\
y'' + 2nx' - n^2 y &= -\frac{\mu_1 y}{\sqrt{(x+c\mu_2)^2 + y^2 + z^2}^3} - \frac{\mu_2 y}{\sqrt{(x-c\mu_1)^2 + y^2 + z^2}^3} \quad .
\end{aligned}
$$

Die Bezeichnungen sind gemäß des Skriptes (Kapitel II, 4.7.2) gewählt.

(a) Transformieren Sie die Gleichungen durch $\overline{x} = x - c\mu_1$ in das Koordinatensystem mit dem Ursprung im Zentrum der Masse m_2. Setzen Sie außerdem $c = 1$ und $n = 1$, wodurch die Längen- und Zeitskalen festgelegt werden.

(b) Wir nehmen nun an, dass $m_2 \ll m_1$ gilt, d.h. $\mu_1 \approx 1$. Weiterhin befinden wir uns in der Umgebung von m_2, d.h. $\overline{x}, y, z \ll 1$. Nähern Sie die Gleichungen in geeigneter Weise. Sie sollten dann

$$
\begin{aligned}
\overline{x}'' - 2y' &\approx \left(3 - \frac{\mu_2}{\sqrt{\overline{x}^2 + y^2 + z^2}^3}\right)\overline{x} \\
y'' + 2\overline{x}' &\approx -\frac{\mu_2 y}{\sqrt{\overline{x}^2 + y^2 + z^2}^3}
\end{aligned}
$$

erhalten. Diese Gleichungen werden auch als Hill-Gleichungen bezeichnet.

Hinweis: Nutzen Sie die Näherung $(1-\Delta)^l \approx 1 - l\Delta$ für $\Delta \ll 1$.

(c) Zeigen Sie, dass entlang der x-Achse zwei Punkte existieren, in denen die Masse m_3, wenn sie anfänglich ruht, keine Beschleunigung erfährt. Der Abstand dieser Punkte zum Zentrum von m_2 definiert den Hill-Radius.

(d) Wenn in den Hill-Gleichungen $\mu_2 = 0$ angenommen wird, reduziert sich das eingeschränkte Drei-Körper-Problem auf das Zwei-Körper-Problem für m_1 und m_3 in einem rotierenden Koordinatensystem, das nicht dem Schwerpunktsystem entspricht. Zeigen Sie, das die Hill-Gleichungen dann durch den Ansatz einer Zykloide

$$
\begin{aligned}
\overline{x}(\tau) &= a_1 \cos(\tau) + a_2 \\
y(\tau) &= b_1 \sin(\tau) + b_2 \tau
\end{aligned}
$$

gelöst werden, wenn bei $\tau = 0$ sich die Masse m_3 bei $\overline{x}(\tau = 0) = x_0$ und $y(\tau = 0) = 0$ in Ruhe befindet. Bestimmen Sie dabei die Konstanten a_1, a_2, b_1 und b_2.

26. **Nebenbedingungen** **(3 Punkte)**

Geben Sie die Art der Nebenbedingungen sowie die Formeln für die folgenden Systeme an:

(a) eine kleine Kugel (Radius vernachlässigbar), die auf einer großen, festen Kugel hinunterrollt und auch von dieser fallen kann.

(b) ein Teilchen, das auf der Innenfläche eines Rotationsparaboloids hinuntergleitet.

(c) ein Körper, der eine Ebene mit zeitlich veränderlichem Neigungswinkel hinuntergleitet.