



10. Übungsblatt

Abgabe: 11. Januar bis 9:45 Uhr im Kasten vor 3.317

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

27. Stark angeregtes Fermigas

(10 Punkte)

In dieser Aufgabe soll am Ende ein stark angeregtes Fermigas betrachtet werden. Für dieses gilt $z := e^{\mu/\tau} < 1$ bzw. $\mu < 0$.

- (a) Als mathematische Vorbetrachtung soll zunächst allgemein

$$f_n(z) := \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{z^{-1} e^x + 1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k^n}$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial z} f_n(z) = \frac{1}{z} f_{n-1}(z)$$

gezeigt werden. n ist dabei eine reelle Zahl.

Tipp: Verwenden Sie die geometrische Reihe, um den Nenner im Integranden zu beseitigen.

- (b) Gehen Sie nun von der bekannten großkanonischen Zustandssumme für ein ideales Fermigas aus und zeigen Sie

$$J(\tau, \mu, V) = -2\pi^{\frac{3}{2}} \frac{\tau V}{\lambda_{dB}^3} f_{5/2}(z)$$

wobei $\lambda_{dB} = \left(\frac{h^2}{2m\tau}\right)^{1/2}$ die thermische de Broglie-Wellenlänge darstellt.

Anleitung: Ersetzen Sie die Summe über die Energiezustände durch ein Integral über die Energie ϵ und integrieren Sie partiell. Greifen Sie auf die in der Vorlesung berechnete Zustandsdichte $D(\epsilon)$ zurück.

- (c) Berechnen Sie die innere Energie $U(\tau, N, V)$ als Funktion des großkanonischen Potentials J .
- (d) Bestimmen Sie für das stark angeregte Fermigas U , C_V und μ jeweils als Funktionen von τ , N , V .
Hinweis: Bestimmen Sie zuerst μ in 1. Näherung. Nähern Sie dann J bis zur 2. Ordnung in z um $U(\tau, N, V)$ zu bestimmen.

28. Fermigas in einer Dimension

(10 Punkte)

Wir betrachten ein Fermigas (N Fermionen) in einer Dimension (z.B. Elektronen im Draht).

- (a) Zeigen Sie, dass die Zustandsdichte $D(\epsilon)$ gegeben ist durch

$$D(\epsilon) = \alpha \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \quad .$$

- (b) Bestimmen Sie α aus der Normierung, dass sich im Grundzustand bis zur Fermienergie ϵ_F N Fermionen im System befinden.
- (c) Berechnen Sie das chemische Potential μ für tiefe Temperaturen mit Hilfe der Näherungen für die Integrale aus Abschnitt 12.3 der Vorlesung (Sommerfeld-Entwicklung).
- (d) Bestimmen Sie analog das Tieftemperaturverhalten ($T \rightarrow 0$) der spezifischen Wärme.