Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan

Quantentheorie WS 2014/15

10. Übungsblatt Abgabe: Di, 13.01.2015 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1415/quanten`.

25. **Der dreidimensionale harmonische Oszillator (14 Punkte)**
Der Hamilton-Operator des kugelsymmetrischen dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{r}^2.$$

Mit dem Ansatz $\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{r}\chi_\ell(r) Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ nimmt die radiale Schrödingergleichung folgende Form an

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} r^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \chi_\ell(r) = 0. \tag{1}$$

Bemerkung: Für $\ell = 0$ ist diese Gleichung identisch zur Schrödingergleichung des eindimensionalen harmonischen Oszillators.

(a) Für $r \to 0$ sind die relevanten Terme der Gleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \chi_\ell(r) = 0.$$

Geben Sie die beiden Lösungen dieser Gleichung an.

(b) Motiviert durch das Ergebnis aus Augabenteil (a) und analog zum eindimensionalen harmonischen Oszillator machen wir folgenden Potenzreihenansatz für die Lösung der radialen Schrödingergleichung (1)

$$\chi_\ell(q) = e^{-q^2/2} q^{\ell+1} \sum_{k=0}^{\infty} c_{\ell,k} q^k$$

mit $q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} r$. Setzen Sie diesen Ansatz in die radiale Schrödingergleichung ein und leiten Sie durch Vergleich der Koeffizienten gleicher q-Potenzen eine Rekursionsrelation für die $c_{\ell,k}$ mit festem ℓ her.

(c) Leiten Sie aus der Abbruchbedingung $c_{\ell,k} = 0$ für $k > k_\ell$ einen Ausdruck für die Energie-Eigenwerte E_N her.

(d) Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabenteil (c) den Entartungsgrad von $E_N = \hbar\omega(N + 3/2)$ für $N = 0, 1$ und 2.
Achtung: Nur die Lösungen mit $c_{\ell,k_\ell} \neq 0$ sind zu zählen.

Bitte wenden! →

(e) Seien $\psi_n(r)$ die Eigenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators zur Energie $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$.

i. Begründen Sie, dass

$$\Psi(\vec{r}) = \psi_i(x)\psi_j(y)\psi_k(z) \tag{2}$$

eine Eigenfunktion des dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist.

ii. Bestimmen Sie mit Hilfe von Gleichung (2) die Eigenwerte E_N des dreidimensionalen harmonischen Oszillators und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil (c).

iii. Bestimmen Sie ausgehend von den Lösungen in Gleichung (2) den Entartungsgrad von $E_N = \hbar\omega(N + \frac{3}{2})$ für $N = 0, 1$ sowie 2 und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil (d).

26. **Wasserstoffatom (6 Punkte)**
Unter Verwendung der radialen Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom wollen wir zwei spezielle Erwartungswerte $\langle r^k \rangle$ ausrechnen.

(a) Zeigen Sie

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{2}{(2\ell + 1)n^3 a_0^2} ,$$

wobei a_0 der Bohrsche Radius ist.
Hinweis: Drücken Sie den Energie-Eigenwert als Funktion der radialen Quantenzahl n_r und ℓ aus. Lassen Sie dann in der radialen Schrödingergleichung reelle ℓ zu und differenzieren Sie beide Seiten nach ℓ.

(b) Zeigen Sie

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{2}{\ell(\ell + 1)(2\ell + 1)n^3 a_0^3} .$$

Hinweis: Differenzieren Sie die radiale Schrödingergleichung nach $\rho = r/a_0$ Ansonsten wird analog zu (a) verfahren. Das Ergebnis aus (a) kann verwendet werden.