INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. Björn Willenberg
M.Sc. Boris Celan

Rechenmethoden II — SoSe 2013

10. Übungsblatt — Abgabe: Di, 25.06.2013 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/sose13/rm213`.

28. **Projektion**
Betrachten Sie den Raum der Funktionen im Intervall $[-1, 1]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Projizieren Sie die Funktion $h(x) = \sin(\pi x)$ in den Unterraum, der von den Funktionen

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^3$$

aufgespannt wird. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Orthogonalisieren Sie die Funktionen $f_n(x)$ nach dem Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren:

$$g_0(x) = f_0(x)$$
$$g_n(x) = f_n(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle g_i|f_n\rangle}{\langle g_i|g_i\rangle}\, g_i(x)$$

(b) Normieren Sie die Funktionen $g_n(x)$ entsprechend dem Skalarprodukt.

(c) Führen Sie die Projektion durch:

$$h_{\text{proj.}}(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle g_i|h\rangle\ g_i(x)$$

(d) Plotten Sie $h(x)$ und $h_{\text{proj.}}(x)$.

Bitte wenden! →

29. **Legendre-Polynome**
Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome $P_n(x)$ ein orthogonales Funktionensystem auf dem Intervall $[-1,1]$ bilden, d.h. es gilt ($n, m \in \mathbb{N}$):

$$\langle P_n | P_m \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

δ_{nm} ist das Kronecker-Delta.
Verwenden Sie zur Lösung die partielle Integration und die Darstellung der Legendre-Polynome durch die Formel von Rodriguez

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \, n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - 1)^n \, .$$

Außerdem darf die Lösung des Integrals

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n \, \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

verwendet werden.

30. **Fourierreihenentwicklung**
Eine Funktion $f(x)$, welche in den Grenzen $[a, b]$ periodisch ist, kann mithilfe einer Fourier-Reihe als Summe trigonometrischer Funktionen dargestellt werden (Fourierreihenentwicklung):

$$\mathcal{F}_{\text{Reihe}}(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right)$$

Dabei ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{b-a}$ die Kreisfrequenz mit der Periode $T = b - a$. Die Koeffizienten $a_n \, (n \geq 0)$ und $b_n \, (n \geq 0)$ erhält man durch

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a} \right) \mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a} \right) \mathrm{d}x.$$

(a) Bestimmen Sie die Fourierentwicklung der 2π-periodisch fortgesetzten Funktionen:

i.
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{für } \pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$$

ii.
$$f(x) = x \ \text{ für } -\pi < x < \pi$$

(b) (**Bonuspunkte**) Plotten Sie die Fourierentwicklung der Funktionen aus Aufgabenteil (a) mit $n = 4, 8$ und 64 Summanden und einem Programmpaket Ihrer Wahl.