INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. M. Feyerabend

9. Übungsblatt Abgabe: keine Abgabe

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

14. **Wiederholung zur Funktionentheorie**

Im Folgenden sollen einige wichtige Resultate der Funktionentheorie wiederholt werden. Diese werden bei der Herleitung der Landau-Dämpfung benötigt.

(a) Die komplexe Ebene ist nichts anderes als ein zweidimensionaler reeller Vektorraum ($z \to (x, y)$)- Zeigen Sie zunächst, dass für eine komplex differenzierbare Funktion $f(z)$ auf U, d.h.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \quad h \in \mathbb{C} \tag{1}$$

existiert für alle $z_0 \in U$, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten:

$$\partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y) \tag{2}$$
$$\partial_y u(x, y) = -\partial_x v(x, y) \tag{3}$$

mit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ erfüllt.

(b) Die komplexe Integration ist analog zu einem Linienintegral im $\mathbb{R}^2$ definiert. Zeigen sie mit Aufgabenteil a), dass

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{4}$$

für eine komplex differenzierbare Funktion $f(z)$ (auch holomorph genannt) gilt.

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz \quad . \tag{5}$$

Hierbei ist $z, z_0 \in \mathbb{C}$ und C ein geschlossener Kreis um z_0.

(d) Der Residuensatz besagt, dass das Integral einer geschlossenen Kurve einer Funktion $f(z)$ die Summe der Residuen ist:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} Res[f(z), z_k] \tag{6}$$

Entwickeln Sie die Funktion $f(z)$ in eine Laurent-Reihe und nehmen Sie C als Kreiskontur an. Bestimmen Sie, welchem Term der Laurent-Reihe $Res[f(z), z_k]$ entspricht.

(e) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das folgende reelle Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx \tag{7}$$