INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. M. Feyerabend

RECHENMETHODEN I | WS 2018/19

9. Übungsblatt | Abgabe: 20. Dezember 2018 bis 9.45 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

26. **Trägheitsmomente eines Ellipsoids** **8 Punkte**

Durch die Menge

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

wird ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b und c definiert. Dieser Ellipsoid besitzt zudem eine konstante Massendichte ρ_0.

(a) Berechnen Sie die Gesamtmasse dieses Ellipsoids.

(b) Bestimmen Sie die *Hauptträgheitsmomente* des Ellipsoids. Diese sind durch

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \rho_0 \int_{\mathcal{E}} \mathrm{d}V \; \left(y^2 + z^2\right) \quad ; \\ \Theta_{22} &= \rho_0 \int_{\mathcal{E}} \mathrm{d}V \; \left(x^2 + z^2\right) \quad ; \\ \Theta_{33} &= \rho_0 \int_{\mathcal{E}} \mathrm{d}V \; \left(x^2 + y^2\right) \end{aligned}$$

definiert.

(c) Geben Sie das Integral zur Berechnung der Oberfläche des Ellipsoids an. Setzen Sie die Parameterdarstellung vollständig ein. Das Integral muss nicht ausgerechnet werden.

Hinweis: Man denke bei der Parametrisierung des Ellipsoids an die Parametrisierung der Ellipse aus Aufgabe 21.

Bitte wenden ⟶

27. **Kugel mit inhomogener Massendichte** **5 Punkte**

Wir betrachten eine Kugel um den Ursprung mit Radius R, deren Massendichte von der Poldistanz θ abhängig ist und als

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \alpha \cos\theta + \beta \cos^2\theta\right)$$

geschrieben werden kann. Mit ρ_0, α, β werden Konstanten bezeichnet.

(a) Berechnen Sie die Gesamtmasse M der Kugel.

(b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S der Kugel. Diese sind durch

$$x_s = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{K}} x\rho \,\mathrm{d}V \quad ; \quad y_s = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{K}} y\rho \,\mathrm{d}V \quad ; \quad z_s = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{K}} z\rho \,\mathrm{d}V$$

definiert.

28. **Differentiation von skalar- und vektorwertigen Funktionen** **7 Punkte**

(a) Beweisen Sie die folgenden Differentiationsregeln für vektorwertige Funktionen $\underline{A}(t)$, $\underline{B}(t)$:

i. $\mathrm{d}_t \left[\underline{A} \cdot \underline{B}\right] = \mathrm{d}_t\underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \mathrm{d}_t\underline{B}$

ii. $\mathrm{d}_t \left[\underline{A} \times \underline{B}\right] = \mathrm{d}_t\underline{A} \times \underline{B} + \underline{A} \times \mathrm{d}_t\underline{B}$

iii. $\underline{A} \cdot \mathrm{d}_t\underline{A} = |\underline{A}|\,\mathrm{d}_t|\underline{A}|$

(b) Es seien $\phi(x, y, z)$ und $\psi(x, y, z)$ skalare Funktionen und $\underline{C}(x, y, z)$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie folgende Differentiationsregeln:

i. $\partial_{\underline{r}} \left(\phi\,\psi\right) = \left(\partial_{\underline{r}}\phi\right)\,\psi + \phi\,\left(\partial_{\underline{r}}\psi\right)$

ii. $\partial_{\underline{r}} \left(\phi\,\underline{C}\right) = \phi\,\partial_{\underline{r}}\underline{C} + \left(\partial_{\underline{r}}\phi\right) \cdot \underline{C}$

iii. $\partial_{\underline{r}} \left(\phi^n\right) = n\,\phi^{n-1}\,\partial_{\underline{r}}\phi$

(c) Wir betrachten ein Teilchen, das sich mit der Geschwindigkeit $\underline{v}(t)$ bewegt. Der Betrag der Geschwindigkeit soll konstant sein, also

$$v \equiv |\underline{v}| = const \quad .$$

Zeigen Sie, dass dann die Beschleunigung $\underline{a} = \mathrm{d}_t\underline{v}$ senkrecht auf $\underline{v}$ steht.