9. Übungsblatt Abgabe: 7. Januar bis 9.40 Uhr im Kasten vor A317

24. **Kreisprozesse** **(7 Punkte)**

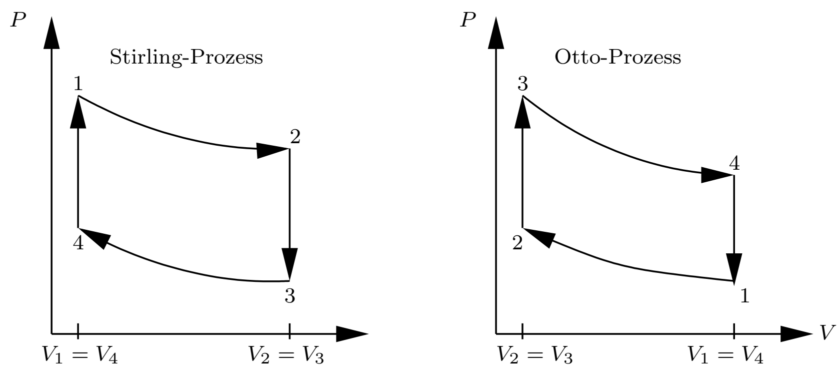
Als Arbeitsmedium in dieser Aufgabe soll ein Gas mit den kalorischen und thermischen Zustandsgleichungen

$$U = \frac{f}{2} N k_B T \qquad \text{und} \qquad pV = N k_B T$$

angenommen werden.

(a) Berechnen Sie zunächst allgemein die Änderung der inneren Energie, Arbeit und Wärme bei einer adiabatischen, isobaren, isochoren und isothermen Zustandsänderung dieses Gases.
Hinweis: Zeigen Sie für die adiabatische Zustandsänderung, dass $pV^\kappa = \text{const}$ mit $f/2 = 1/(\kappa - 1)$ gilt, um daraus dann die Arbeit zu bestimmen.

(b) Nun werden explizit die unten skizzierten Kreisprozesse betrachtet. Berechnen Sie für die einzelnen Schritte des Kreisprozesses die Wärme- und Arbeitsänderung. Nutzen Sie dies zur Bestimmung des Wirkungsgrades.



i. *Stirling-Prozess.* $1 \to 2$ und $3 \to 4$ sind Isothermen
ii. *Otto-Prozess.* $1 \to 2$ und $3 \to 4$ sind Adiabaten

25. **Gitterschwingungen im Festkörper: Einstein-Modell** **(8 Punkte)**

Wir betrachten einen Festkörper aus N Atomen näherungsweise als ein System von $3N$ ungekoppelten, linearen, harmonischen Oszillatoren. Im *Einstein-Modell* wird angenommen, dass alle $3N$ Eigenfrequenzen identisch sind und einen festen Wert ω_E haben. Die Größe $\Theta_E = \hbar\omega_E/k_B$ wird als *Einstein-Temperatur* bezeichnet.

(a) Erklären Sie zuerst kurz, warum diese Oszillatoren als unterscheidbar angesehen werden können.

(b) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $\mathcal{Z}$, die freie Energie F, das chemische Potential μ, den Druck p und die Entropie S.

(c) Geben Sie Näherungsausdrücke an, die das Verhalten von $\ln \mathcal{Z}$, F und S in den Grenzfällen $T \gg \Theta_E$ bzw. $T \ll \Theta_E$ beschreiben.

Bitte wenden $\longrightarrow$

(d) Bestimmen Sie die innere Energie U. Geben Sie Näherungsausdrücke an, die das Verhalten von U in den Grenzfällen $T \gg \Theta_E$ bzw. $T \ll \Theta_E$ beschreiben. Diskutieren Sie die Ergebnisse. Skizzieren Sie die Funktion $U(T)$.

(e) Bestimmen Sie die Wärmekapazität C_V und stellen Sie das Ergebnis mit Hilfe der *Einstein-Funktion*

$$E(x) = \frac{x^2 \exp(x)}{(\exp(x) - 1)^2}$$

dar. Untersuchen Sie das Verhalten von C_V für $T \ll \Theta_E$. Zeigen Sie, dass C_V für $T \gg \Theta_E$ dem klassischen Wert $C_V = 3Nk_B$ entspricht (Gesetz von Dulong-Petit). Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $C_V(T)$.

26. **Der Weihnachtsmann und tiefe Temperaturen** **(5 Punkte)**

Jemand hat sich vom Weihnachtsmann suprafluides ^{3}He gewünscht. Dem Weihnachtsmann ist klar, dass er dafür extrem tiefe Temperaturen ($\sim$ mK) benötigt, jedoch nicht, wie man diese erreicht. Eine Möglichkeit der Erzeugung solcher Temperaturen ist die magnetische Kühlung, die in dieser Aufgabe diskutiert werden soll. Wir betrachten dazu wiederum eine Spinkette im äußeren Magnetfeld $H = \mu B$. Die dazugehörige Entropie lautet

(a) In Aufgabe 8 wurden als Zwischenergebnisse die Ausdrücke

$$\sigma(U, N, B) = N \ln N - \frac{1}{2}\left(N - \frac{U}{\mu B}\right) \ln\left(\frac{N}{2} - \frac{U}{2\mu B}\right) - \frac{1}{2}\left(N + \frac{U}{\mu B}\right) \ln\left(\frac{N}{2} + \frac{U}{2\mu B}\right)$$

und

$$U(\tau, N, B) = -\mu B N \tanh\left(\frac{\mu B}{\tau}\right)$$

für die Spinkette bestimmt. Zeigen Sie, dass daraus für die Entropie

$$S(T, N, H) = N k_B \left\{ \ln\left[2 \cosh \frac{H}{k_B T}\right] - \frac{H}{k_B T} \tanh\left(\frac{H}{k_B T}\right) \right\}$$

hergeleitet werden kann.

(b) Wenn man bei eingeschaltetem Magnetfeld H_a wartet, bis sich das thermodynamische Gleichgewicht mit der Temperatur T_a eingestellt hat und dann das äußere Magnetfeld auf den Wert H_e rasch absenkt und dafür sorgt, dass die Entropie des Systems konstant bleibt (adiabatischer Vorgang), so stellt sich ein neues Gleichgewicht bei niedrigerer Temperatur $T_e < T_a$ ein, die Spinkette wird also abgekühlt. Zeigen Sie, dass dann in 1. Näherung die Beziehung

$$\frac{T_e}{T_a} = \frac{H_e}{H_a}$$

gilt.

(c) Wenn man nun das Magnetfeld wieder auf H_a langsam erhöht, und dabei die Temperatur konstant hält, so kann man sukzessive zu tieferen Temperaturen gelangen. Skizzieren Sie diesen Vorgang in einem S-T-Diagramm. Warum kann man nie $T = 0$ erreichen? Begründen Sie außerdem den Wert von S in Abwesenheit eines äußeren Feldes.

Frohe Weihnachten
und einen guten Start ins Jahr 2016!